Jesús Mosterín

Los Lógicos

ESPASA

ESPASA FÓRUM

Directora: Pilar Cortés
Editora: Olga Adeva

Primera edición: febrero, 2000
Segunda edición: abril, 2000
Tercera edición: septiembre, 2000

© Jesús Mosterín Heras, 2000
© Espasa Calpe, S. A., 2000

Diseño de cubierta: Tasmanias
Foto de portada: Chema Madoz
Ilustraciones de interior: Jesús Mosterín, Miguel de Guzmán y Archivo Gráfico Espasa Calpe
Realización de cubierta: Ángel Sanz Martín

Depósito legal: M. 37.089-2000
ISBN: 84-239-9755-3

Impreso en España / Printed in Spain
Impresión: Huertas, S. A.

Editorial Espasa Calpe, S. A.
Carretera de Irún, km 12,200. 28049 Madrid

ÍNDICE

PRÓLOGO 11
INTRODUCCIÓN TERMINOLÓGICA: EL LENGUAJE CONJUNTISTA 15
Relaciones de equivalencia 17
Biyectabilidad 18
Los números enteros y racionales 20

1. GOTTLOB FREGE (1848-1925) 25
Alemania en la época de Bismarck 25
Infancia y juventud de Frege 27
Ernst Abbe 28
El sueño de una lengua universal perfecta 32
Creación de la lógica moderna 37
Los símbolos lógicos de Frege 42
El cálculo deductivo de Frege 45
Los números naturales en Frege 46
Dedekind 51
Peano 54
El programa logicista 57
Lógica filosófica y filosofía del lenguaje 62
Hilbert y Frege sobre el método axiomático 67
El método axiomático 70
Las geometrías no euclídeas 72
Frege, analista del método hilbertiano 76
Amargura y ocaso 84

2. GEORG CANTOR (1845-1918) 89
Infancia y juventud 89
Carrera académica 94
Cantor y Dedekind 96
Los números reales y complejos 98
Finito e infinito 102
La supernumerabilidad del conjunto de los números reales .. 106
Cuestiones de cardinalidad 108
1884-1897: período de crisis 109
La polémica Bacon-Shakespeare 111
Filosofía 114
La *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* 119
Números ordinales 121
Tipos de orden 123
Las antinomias 128
Época de vejez 131

3. BERTRAND RUSSELL (1872-1970) 137
Infancia y adolescencia 138
Juventud 140
Fundamentos de la geometría 143
Rebelión contra el idealismo 145
El Congreso Internacional de Filosofía de París 148
Los principios de la matemática 149
El logicismo 151
Las paradojas 152
La teoría de las descripciones 153
La teoría de los tipos 155
Principia Mathematica 157
Evaluación posterior del logicismo de Russell 159
El fenomenismo 160
Filósofo práctico 164
Dora 166
Educación infantil 171
Matrimonio y moral 176

Historia de la filosofía 177
La última etapa 178

4. JOHN VON NEUMANN (1903-1957) 181
Hungría 181
Infancia y juventud 183
Los ordinales 186
Aritmética ordinal y recursión transfinita 188
Axiomatización de la teoría de conjuntos 191
Axiomas de la teoría de conjuntos 192
La noción de conjunto y la jerarquía acumulativa 194
Mecánica cuántica 198
El espacio de Hilbert 202
En América 205
Personalidad e inteligencia 208
Teoría de juegos 210
Computadores 212
Autómatas autorreproductores 213
Bomba de hidrógeno 214
La muerte de von Neumann 216

5. KURT GÖDEL (1906-1978) 219
Infancia y edad escolar 221
Época de estudiante 223
La completud del cálculo lógico de primer orden 225
Prueba del teorema de completud semántica 228
Incompletud de la aritmética formal 230
Gödelización 236
La prueba del teorema de incompletud de la aritmética 238
Aritmética clásica e intuicionista 243
Tiempos turbulentos (1934-1939) 246
Consistencia relativa de AC y GCH 251
La prueba de la consistencia relativa de AC y GCH 254
Adele y otros temas de la vida privada 258
Filosofía de la matemática 263

Cosmología 274
El modelo cosmológico de Gödel (1949) 279
En Princeton 280
Los últimos años 283

6. ALAN TURING (1912-1954) 287
Infancia y juventud 287
Como una máquina 289
Funciones recursivas 292
Máquinas de Turing 295
En Princeton 298
Descifrando códigos 300
¿Puede pensar una máquina? 303
Suicidio 306
Tablas y diagramas de máquinas de Turing 308
Turing-computabilidad de las funciones recursivas primitivas .. 312

LECTURAS SUPLEMENTARIAS 321

PRÓLOGO

La matemática es la más grande aventura del pensamiento. En otras actividades también pensamos, obviamente, pero contamos además con la guía y el control de la observación empírica. En la matemática pura navegamos por un mar de ideas abstractas, sin más brújula que la lógica.

Jacobi pensaba que la finalidad única de la matemática consiste en honrar al espíritu humano. Por otro lado, la matemática y el pensamiento abstracto impregnan toda la ciencia y la tecnología actuales. Desde la cosmología hasta la economía, nuestro conocimiento de la naturaleza y de la sociedad sería inconcebible sin las matemáticas. A diferencia de la ciencia antigua, que buscaba una comprensión cualitativa de los fenómenos, la ciencia moderna se basa en la construcción de modelos teóricos (es decir, matemáticos) de la realidad. La realidad es excesivamente compleja para poder ser directamente comprendida por nuestras limitadas entendederas. Lo único que podemos hacer es buscar en el universo matemático una estructura que se parezca en algún aspecto relevante a la porción de la realidad por la que nos interesemos, y usar esa estructura como modelo teórico simplificado de la realidad. Una vez que disponemos de un modelo teórico, podemos traducir al lenguaje de las matemáticas las preguntas que nos hacemos en la vida real, podemos computar la respuesta dentro del modelo y, finalmente, podemos retraducir esa respuesta matemática al lenguaje de la vida real.

Si queremos calcular trayectorias de aviones o barcos sobre la superficie terrestre, modelamos la Tierra mediante una esfera o un elip-

soide. En las teorías científicas avanzadas las estructuras matemáticas que utilizamos como modelos son más complicadas. La cosmología usa la teoría general de la relatividad, que modela el espacio-tiempo físico como una variedad diferencial provista de una cierta métrica (un campo tensorial). La mecánica cuántica modela los sistemas atómicos como espacios de Hilbert (ciertos espacios vectoriales de un número infinito de dimensiones).

¿De dónde sacamos esas esferas y elipsoides, de dónde sacamos los números, los vectores, las probabilidades, las variedades diferenciales, los campos tensoriales, los espacios de Hilbert? Los sacamos del universo matemático. Y ¿de dónde sacamos el universo matemático? Nos lo sacamos de la cabeza. Es una creación del espíritu humano, pero no es una creación arbitraria, sino constreñida por una lógica implacable. El resultado de esa creación, el universo matemático, es un depósito inagotable de todo tipo de estructuras imaginables e inimaginables. Algunas de esas estructuras pueden reducirse a otras en el sentido de ser definibles a partir de ellas. La ontología matemática —es decir, la teoría de conjuntos— trata de reducir la vertiginosa variedad de las estructuras a sus componentes básicos, que en último término son los conjuntos. A partir del conjunto vacío e iterando unas pocas operaciones, el matemático —como un compositor— construye la gran sinfonía del universo matemático, con todos sus números y espacios.

En los modelos calculamos y obtenemos mediante computaciones las respuestas que buscamos. Los computadores son «cerebros electrónicos», extensiones de nuestras cabezas, máquinas que implementan programas formales y nos permiten resolver nuestros problemas, al menos en la medida en que estos sean computables. Qué problemas sean computables y hasta qué punto lo sean es aquí una cuestión crucial.

Alguien podría pensar que algo tan abstracto como la lógica solo podría atraer a personalidades frías y exangües. Pero las apariencias engañan. Bajo el hielo de la razón pura arde a veces una llama abrasadora y un corazón atormentado. A los veinte años Jean van Heijenoort se había entregado totalmente a la causa de la revolución mundial. Como secretario particular y guardaespaldas de Trotski, lo acompañó

en su exilio en Turquía, Francia, Noruega y México. Asesinado Trotski, van Heijenoort se puso a estudiar lógica y matemáticas y se convirtió en historiador prominente de la lógica. Lejos de cualquier frialdad, se pasó la vida en tormentosas pasiones amorosas con sus diversas esposas y amantes. Cuando yo lo traté, bajo las cenizas de la edad todavía ardían brasas incandescentes. Su última mujer, la mexicana Ana María, nada más conocerlo, lo describió como «una llama de fuego puro». En ese fuego se quemaron los dos. Ya separados, y dedicado Jean en Stanford a la edición de las obras completas de Gödel, Ana María lo conminó a volver a México inmediatamente, porque ella quería suicidarse y matarlo a él. Él canceló todos sus compromisos y tomó el primer avión a México. Allí, en la cama, ella le disparó tres tiros en el cráneo y a continuación se disparó a sí misma en la boca, como había anunciado. En fin, cualquier cosa excepto una vida fría y aburrida. De todos modos, su contribución creativa a la lógica, aunque apreciable, fue modesta. Quine, sin embargo, aunque mucho más importante como filósofo y lógico, y aunque coronado por el éxito académico, ha tenido la vida previsible y desangelada del típico profesor universitario, como su propia autobiografía se encarga de documentar, dicho sea con el respeto y admiración que cuantos lo conocemos le profesamos. ¿No habrá habido lógicos que hayan combinado el interés humano de una vida extrema con la plenitud del genio creador? Sí, los ha habido, y de algunos de ellos trata este libro.

Aunque hace mucho tiempo que los seres humanos razonan, clasifican y calculan, solo a finales del siglo XIX y principios del XX se ha logrado una cierta claridad acerca de la lógica, las clases y los algoritmos, temas todos ellos íntimamente imbricados entre sí. Esta clarificación es el fruto de una de las mayores revoluciones intelectuales de todos los tiempos, que incluyó la creación de la lógica moderna, la teoría de conjuntos y la teoría de la computación, la aritmetización del análisis y la transformación de la filosofía teórica. Esos progresos fueron llevados a cabo por varios pensadores geniales, que eran a la vez filósofos y matemáticos, y a los que aquí vamos a llamar los lógicos. De entre los lógicos que hicieron la revolución, hemos elegido a seis héroes intelectuales, de obra decisiva y vida interesante: Frege, Cantor, Russell, von

Neumann, Gödel y Turing. Por su obra, podríamos haber elegido también a otros (como Dedekind, Hilbert, Zermelo o Tarski), pero su vida no fue tan dramática.

Espero que esta combinación de biografía y lógica, de anécdota y concepto, de contexto histórico y desarrollo abstracto, resulte digerible para el lector y sea de su agrado. En el mejor de los casos, el lector lego en lógica y matemáticas puede aprender algo de esas disciplinas leyendo este libro, y el lector ducho en esas materias puede aprender algo acerca de los hombres atormentados que las crearon y de la época en que les tocó vivir. Las páginas normales de este libro, sin recuadro, contienen textos biográficos (incluyendo la biografía intelectual, claro). Las páginas recuadradas contienen textos más directamente matemáticos, aunque a un nivel siempre bastante elemental (espero). Así, el lector al que se le indigesten las matemáticas puede simplemente ignorar las páginas recuadradas y saltárselas. También puede saltárselas el docto en el asunto, que no las necesita. El lector puede elegir leer unos capítulos con independencia de los otros, seguir el orden aquí establecido o un orden distinto, limitarse a las porciones biográficas o leer también las matemáticas. En general, puede confeccionar su propio menú de lectura. Finalmente, quiero agradecer a Joan Bagaría y a José Ferreirós sus buenos consejos y su ayuda en la detección de descuidos y errores en la versión inicial de esta obra.

Jesús Mosterín

INTRODUCCIÓN TERMINOLÓGICA: EL LENGUAJE CONJUNTISTA

El siglo XIX registró una extraordinaria eclosión de creatividad matemática: nuevas ramas del álgebra, de la teoría de números, del análisis, de la geometría y de otras disciplinas surgían por doquier, cada una con su propia terminología, sus conceptos y métodos distintos. Sin embargo, esa proliferación y dispersión se vio compensada por el desarrollo de un lenguaje universal de la matemática, basado en nociones muy abstractas, que encontraban aplicación en los más diversos campos: el lenguaje conjuntista.

La primera noción conjuntista es la noción misma de **conjunto**. Pensadores como Riemann, Dedekind[1] y Cantor empezaron a usarla, bajo los nombres diversos de sistema (*System*), variedad (*Mannigfaltigkeit*), conjunto (*Menge*), compendio (*Inbegriff*) y multiplicidad (*Vielheit*). Otros, como Russell, preferirían hablar de clases. Aunque el uso demasiado alegre de la noción de conjunto acabaría produciendo problemas (las famosas antinomias de las que más adelante hablaremos), aquí solo nos interesa señalar la gran abstracción y universalidad de la noción. Un conjunto es una cierta pluralidad de objetos (sus elementos o miembros o puntos) que puede considerarse como una unidad.

[1] José Ferreirós ha estudiado y subrayado el papel desempeñado por Riemann y Dedekind, además de Cantor, en el desarrollo inicial del lenguaje conjuntista. Véase su libro *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*, así como su edición de la obra de Dedekind *¿Qué son y para qué sirven los números?*

Hay que distinguir entre la relación de **pertenencia** en que está un elemento con un conjunto al que pertenece (que suele representarse por el signo $\in$) y la relación de **inclusión** en que está un subconjunto con un conjunto que lo incluye (que se representa por $\subseteq$). Un conjunto A está incluido en otro B (en signos, $A \subseteq B$) si y solo si todos los elementos de A son elementos de B, es decir, si para todo x: si $x \in A$, entonces $x \in B$. Al principio había una cierta confusión entre pertenencia e inclusión, y fue precisamente Frege quien más contribuyó a clarificar la distinción, que luego Peano popularizó al introducir símbolos distintos para ambas relaciones. La clase de todos los subconjuntos o **partes de** A se denomina $\wp A$.

El conjunto vacío (en signos, $\varnothing$) es el único que carece de elementos. El conjunto unitario $\{a\}$ es el conjunto cuyo único elemento es a. Para todo x: $x \in \{a\}$ si y solo si $x = a$. El par desordenado $\{a, b\}$ es el conjunto cuyos únicos elementos son a y b. Para todo x: $x \in \{a, b\}$ si y solo si $x = a$ o $x = b$. El conjunto de todos los objetos x que satisfacen una condición ...(x)... se representa mediante $\{x \mid ...(x)...\}$. Aunque $\{a, b\} = \{b, a\}$, eso no siempre ocurre con los pares ordenados (a, b), que (para $a \neq b$) son distintos de (b, a), pues en ellos se tiene en cuenta el orden en que estén dados ambos elementos.

Una **relación binaria** es un conjunto de pares ordenados de objetos. La relación en que están todos los elementos de un conjunto A con todos los de otro conjunto B se llama el **producto cartesiano** de A y B, designado $A \times B$. $A \times B = \{(x, z) \mid x \in A \text{ y } z \in B\}$, es decir, $A \times B$ es el conjunto de todos los pares (x, z) tales que $x \in A$ y $z \in B$.

Otra noción conjuntista fundamental es la noción abstracta de **función** o aplicación (también llamada en ciertos contextos proyección, operación, transformación, etc.). En el siglo XVIII y gran parte del XIX se identificaba una función con una cierta ley, fórmula o expresión que permitía calcular para cada elemento de un conjunto un elemento de otro conjunto, por ejemplo, un número. Pero Dirichlet generalizó el concepto a correspondencias unívocas cualesquiera, aunque no estuvieran dadas mediante fórmula ni ley alguna. En teoría de conjuntos una **aplicación** de A en B (en signos, $f: A \to B$) es una relación entre A y B (es decir, un conjunto de pares ordenados de $A \times B$) tal que el pri-

mer miembro de cada par determina unívocamente al segundo. A se llama el **dominio** de f. Si f es una función y $(a, b) \in f$, entonces decimos que $f(a) = b$.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Las relaciones de equivalencia juegan un papel importante en múltiples ámbitos. Una relación binaria $\sim$ entre objetos de un dominio A es una **relación de equivalencia** si y solo si es reflexiva, simétrica y transitiva en ese dominio (es decir, si y solo si para cada $x, y, z \in A$: (*i*) $x \sim x$; (*ii*) si $x \sim y$, entonces $y \sim x$; (*iii*) si $x \sim w$ y $w \sim z$, entonces $x \sim z$). Dada una relación de equivalencia en A, llamamos **clase de equivalencia** de un elemento $x \in A$, $[x]$, a la clase de todos los elementos de A que están relacionados con x en esa relación de equivalencia, $[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$. Cada una de estas clases de equivalencia es un subconjunto de A. Por tanto, $[\,]: A \rightarrow \wp A$.

Una partición de un conjunto A es una clase de subconjuntos no vacíos de A, tales que cada dos de esos subconjuntos son disjuntos (carecen de elementos comunes) y entre todos son exhaustivos de A (su unión contiene todos los elementos de A y, por tanto, es igual a A). En especial, una familia finita de conjuntos $\{B_1, \ldots B_n\}$ es una **partición** de un conjunto A si y solo si (*i*) para cada i, j $(1 \leq i \neq j \leq n)$: $B_i \cap B_j = \emptyset$, y (*ii*) $B_1 \cup \ldots \cup B_n = A$.

Toda relación de equivalencia $\sim$ sobre un dominio A induce una partición de ese dominio en clases de equivalencia, llamada el **espacio cociente** de A por la relación $\sim$, y simbolizada como $A/\sim$. Este hecho se usa con frecuencia para clasificar un dominio mediante la previa introducción de una relación de equivalencia.

Una manera frecuente de definir entidades matemáticas consiste en definirlas como las clases de equivalencia inducidas por una determinada relación de equivalencia en un conjunto previamente dado de elementos. Consideremos el conjunto de las rectas del plano. Y supongamos dada la relación de paralelismo entre ellas. La relación de paralelismo es una relación de equivalencia. Por tanto, la relación de paralelismo da lu-

gar a una partición del conjunto de las rectas en clases de equivalencia, a las que llamamos direcciones. La dirección de una recta b no es sino la clase de equivalencia de b respecto a la relación de paralelismo, es decir, la clase de todas las rectas paralelas a b.

También fuera de la matemática tiene aplicación el procedimiento. Consideremos la siguiente relación de equivalencia $\sim_p$ sobre el dominio A de los átomos. Para cada dos átomos $x, z \in A$: $x \sim_p z$ si y solo si x tiene el mismo número de protones en su núcleo que z. La clase de equivalencia (respecto a esta relación) de un átomo determinado es el conjunto de todos los átomos que tienen su mismo número de protones en el núcleo, es decir, es un elemento químico. Así, el elemento químico carbono es la clase de todos los átomos que tienen 6 protones en su núcleo, el elemento químico nitrógeno es la clase de todos los átomos que tienen 7 protones en su núcleo, el elemento químico oxígeno es la clase de todos los átomos que tienen 8 protones en su núcleo, etc. El espacio cociente $A/\sim_p$ es el conjunto de los elementos químicos. A alguien que acepte la existencia de átomos, pero encuentre problemática la de elementos químicos, podemos convencerle de aceptar estos últimos, mostrándole cómo pueden ser construidos o definidos a partir de los primeros mediante la introducción de la citada relación de equivalencia y la correspondiente definición del espacio cociente. Este procedimiento resulta especialmente fecundo dentro de la matemática misma, como a continuación veremos.

Biyectabilidad

Una relación de equivalencia especialmente importante en teoría de conjuntos es la relación de biyectabilidad.

Toda aplicación (o inyección) es una correspondencia unívoca entre dos conjuntos. Si es incluso una correspondencia biunívoca, decimos que se trata de una biyección. Una **biyección** f entre A y B es una aplicación $f: A \to B$, tal que f asigna a elementos distintos de A valores distintos en B (por tanto, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$), y tal que los va-

lores de f recorren todo B (es decir, para cada $y \in B$ hay un $x \in A$ tal que $f(x) = y$). Si f es una biyección de A en B, entonces la aplicación inversa f^{-1} es una biyección de B en A, a saber, la biyección tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Dos conjuntos A y B son **biyectables** si y solo si existe una biyección entre ellos. Para establecer una biyección o correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos, no es necesario numerarlos: el camarero que coloca un tenedor al lado de cada plato está estableciendo una biyección entre los platos y los tenedores de la mesa sin necesidad de contarlos. La noción de biyectabilidad es fundamental en el lenguaje conjuntista, aunque los creadores de ese lenguaje usaron inicialmente toda una serie de sinónimos para expresarla. En vez de conjuntos biyectables hablaban a veces de conjuntos equivalentes, equinumerosos (*gleichzahlig*), equipotentes (*gleichmächtig*), semejantes (*ähnlich*), etc.

A su vez, la noción de biyectabilidad está a la base de la noción de **cardinalidad** o potencia (*Mächtigkeit*) o cantidad de elementos de un conjunto. Cantor simbolizaba la cardinalidad de un conjunto escribiendo dos rayitas horizontales sobre la letra que lo representa, pero luego se han impuesto las dos rayas verticales como símbolo de la cardinalidad. Así pues, $|A|$ es la cardinalidad de A. Pero, ¿qué es la cardinalidad de A? De momento, baste con señalar que cualquier noción de cardinalidad ha de satisfacer la condición de que dos conjuntos biyectables tienen la misma cardinalidad: $|A| = |B|$ si y solo si A es biyectable con B. En los casos de conjuntos finitos, la cuestión de la biyectabilidad suele ser trivial, pero en el caso de los conjuntos infinitos el tema es más peliagudo.

En las matemáticas (y en la física teórica y otras disciplinas matematizadas) solemos centrar nuestra atención no en conjuntos aislados, sino en ciertos conjuntos complicados, llamados sistemas o estructuras. Un sistema o estructura está formado por un conjunto básico (su ámbito o universo o dominio) y varias relaciones o funciones definidas sobre ese conjunto. Aunque dos sistemas concretos puedan ser materialmente distintos (en el sentido de que sus dominios estén formados por individuos diferentes e incluso de diferente tipo), sin embargo pueden compartir la misma forma, es decir, ser isomorfos. Sean $\mathcal{A} = (A, R, f)$ y $\mathcal{B} = (B, S, g)$ dos sistemas tales que A y B son conjuntos no va-

cíos, R es una relación binaria en A, S es una relación binaria en B, f es una operación en A (es decir, una función de $A \times A$ en A) y g es una operación en B. Un **isomorfismo** entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una biyección h entre A y B que conserva las relaciones y operaciones, es decir, tal que para cada $x, z \in A$, xRz si y solo si $h(x)Sh(z)$, y $f(x, z) = w$ si y solo si $g(h(x), h(z)) = h(w)$. Dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son **isomorfos** entre sí si existe un isomorfismo entre ellos.

LOS NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES

Los habitantes más conspicuos del universo matemático son los números de diversos tipos. Una de las hazañas intelectuales más notables de los matemáticos y lógicos de la época aquí estudiada consistió en la aritmetización del análisis, es decir, en definir todos esos tipos de números en función de los números naturales y las nociones conjuntistas. Como a su vez los números naturales también fueron definidos mediante nociones conjuntistas, parecía que en último término toda la matemática se reducía a la teoría de conjuntos. Vamos a presentar aquí brevemente algunos de estos resultados, en parte para ejercitar las nociones recién introducidas, como las de relación de equivalencia y espacio cociente.

Según Kronecker, Dios creó los números naturales, y todas las demás entidades matemáticas son obra de los hombres. En cualquier caso, los grandes matemáticos del siglo XIX se propusieron aritmetizar el análisis, lo cual exigía, entre otras cosas, construir o definir sucesivamente los otros tipos de números (los enteros, los racionales, los algebraicos, los reales, los complejos) a partir de los naturales. El procedimiento suele ser el ya indicado de definir un nuevo dominio de números como el espacio cociente de un dominio previo por una cierta relación de equivalencia. Veámoslo.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, que suponemos ya dado. También suponemos dada la adición $+$ entre números naturales. Vamos a definir los números enteros, que abarcan tanto los enteros positivos como los negativos. Po-

demos considerar un par de números naturales, (n, m), como representando la diferencia entre ambos números, $n-m$. Si $n>m$, $n-m$ será un entero positivo; si $n<m$, $n-m$ será un entero negativo. Por ejemplo, $(2, 7)$ representa a $2-7=-5$, un entero negativo, al que también representan otros pares, como $(0, 5)$, $(1, 6)$, $(5, 10)$, etc. Lo que hacemos es identificar al número entero -5 con la clase de todos esos pares de números naturales. Se trata de una clase de equivalencia respecto a la relación de equivalencia en que están dos pares (n, m) y (p, q) de números naturales si y solo si $n-m=p-q$, o, lo que es lo mismo, si y solo si $n+q=p+m$. Así pues, $-5=[(0,5)]=\{(0, 5), (1, 6), (2, 7), \ldots (5, 10), (6, 11), \ldots\}$.

Supongamos que ya disponemos de los números naturales y de la adición de números naturales. El producto cartesiano de N por N, $N\times N$, es el conjunto de todos los pares ordenados de números naturales. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en que está un par (n, m) de números naturales con otro (p, q), es decir, $(n, m)\sim(p, q)$, si y solo si $n+q=p+m$. Entonces el conjunto $\mathbb{Z}$ de los **números enteros** es el espacio cociente de $N\times N$ por $\sim$: $\mathbb{Z}=N\times N/\sim$.

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros podemos definir una adición de enteros $+_Z$ del siguiente modo. Para cada dos enteros $[(n, m)]$ y $[(p, q)]$: $[(n, m)]+_Z[(p, q)]=[(n+p, m+q)]$. En efecto, $(n+p)-(m+q)=(n-m)+(p-q)$. Esta adición es asociativa y conmutativa, tiene un elemento neutral o cero $=[(0, 0)]$ y respecto a ella cada elemento posee un inverso. Por tanto, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, junto con la adición de enteros $+_Z$, constituye un grupo abeliano. En $\mathbb{Z}$ podemos definir también una multiplicación de enteros $\cdot_Z$ del siguiente modo. Para cada dos enteros $[(n, m)]$ y $[(p, q)]$: $[(n, m)]\cdot_Z[(p, q)]=[(np+mq, nq+mp)]$, donde np representa la multiplicación de los números naturales n y p, que suponemos ya dada. En efecto, $(n-m)\cdot(p-q)=(np+mq)-(nq+mp)$. Esta multiplicación es asociativa, conmutativa, distributiva sobre la adición, y tiene un elemento neutral o unidad $=[(1, 0)]$, distinto del elemento cero. Por tanto, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, junto con la adición de enteros $+_Z$ y la multiplicación de enteros $\cdot_Z$ constituye un anillo, e incluso un anillo de integridad, ya que el producto de dos enteros distintos de cero es también distinto de cero.

Entre los enteros podemos definir una relación binaria del siguiente modo: $[(m, n)] <_Z [(p, q)]$ si y solo si $m+q<p+n$, es decir, si y solo si hay un número natural k (distinto de 0) tal que $m+q+k=p+n$. Se trata de una relación de orden lineal en $\mathbb{Z}$. Este orden es preservado bajo adición y bajo multiplicación con enteros distintos de cero. Además, su parte no-negativa (sus elementos iguales o mayores que 0 respecto a $<_Z$) está bien ordenada.

Los sistemas matemáticos solo pueden definirse (en el mejor de los casos) hasta isomorfía, es decir, caracterizando su estructura, pero sin fijar los objetos que realicen esa estructura. El lenguaje conjuntista nos permite definir, por ejemplo, lo que es un sistema de números enteros. Un sistema $(E, +, \cdot, 0, 1, <)$ tal que $(E, +, \cdot, 0, 1)$ es un anillo de integridad, $(E, <)$ es un orden lineal y $(\{x \in E \mid 0=x \text{ o } 0<x\}, <)$ es un buen orden, es un sistema de números enteros. Cualesquiera dos sistemas de números enteros son isomorfos entre sí, y por tanto matemáticamente equivalentes. Pero esto todavía no nos garantiza que exista algún sistema de números enteros. Sin embargo, ya hemos visto cómo, a partir del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, podemos construir o definir el sistema $(\mathbb{Z}, +_Z, \cdot_Z, 0_Z, 1_Z, <_Z)$, al que podemos considerar como 'el' sistema de los números enteros, en el sentido de que cualquier otro candidato será isomorfo a él.

El mismo procedimiento podemos aplicarlo a los otros tipos de números. Aunque más brevemente, consideremos el caso de los racionales. Los números racionales o fraccionarios son los valores de las fracciones de números enteros. Así como la ventaja de los números enteros respecto a los naturales es que con ellos siempre podemos restar, la ventaja de los racionales respecto a los enteros es que con los racionales siempre podemos dividir (excepto por 0).

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, es decir, $\mathbb{Z}=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$, que suponemos ya dado. Vamos a definir los números racionales, que abarcan los cocientes de números enteros. Podemos considerar un par de números enteros (n, m), tal que $m \neq 0$, como representando al cociente de ambos números, n/m. Por ejemplo, $(2, 4)$ representa a $2/4=1/2$, al que también representan otros pares, como $(1, 2)$, $(3, 6)$, $(5, 10)$, etc. Lo que hacemos es identificar al número racio-

nal 1/2 con la clase de todos esos pares de números enteros. Se trata de una clase de equivalencia respecto a la relación de equivalencia en que están dos pares (n, m) y (p, q) de números enteros si y solo si $n/m = p/q$, o, lo que es lo mismo, si y solo si $n \cdot_{\mathbb{Z}} q = p \cdot_{\mathbb{Z}} m$.

$\mathbb{Z}-\{0\}$ es el conjunto de todos los números enteros excepto el cero. El producto cartesiano de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}-\{0\}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números enteros cuyo segundo miembro no es 0. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en que está un par (n, m) de números enteros con otro (p, q), $(n, m) \sim (p, q)$, si y solo si $n \cdot_{\mathbb{Z}} q = p \cdot_{\mathbb{Z}} m$. Entonces el conjunto $\mathbb{Q}$ de los **números racionales** es el espacio cociente de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$ por $\sim$: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})/\sim$.

Más adelante, en el capítulo 2, mostraremos cómo definir los números reales y complejos a partir de los racionales.

1
GOTTLOB FREGE (1848 - 1925)

ALEMANIA EN LA ÉPOCA DE BISMARCK

Hasta bien entrado el siglo XIX no había existido un estado alemán integrado, sino solo una yuxtaposición de numerosos estados (reinos, principados, ducados, ciudades libres, etc.) alemanes distintos, independientes, con grados diferentes de desarrollo político y económico, aislados por fronteras y aranceles, empleando cada uno su propia moneda, así como sus propias unidades, pesas y medidas. Desde 1848 la tendencia a la unificación era imparable y acabó consumándose bajo la hegemonía del reino de Prusia y por obra de Otto von Bismarck (1815-1898), el artífice de la unidad alemana. En 1862 el rey Wilhelm I lo nombró primer ministro de Prusia, a fin de ampliar y reorganizar el ejército contra la voluntad del Parlamento. Utilizando astutamente los recursos de la guerra y la diplomacia, y tras vencer en pocas batallas a Dinamarca y Austria, en 1866 Bismarck fundó el *Norddeutsche Bund* (la Federación Nortealemana), a la que, además de Prusia, se incorporaron Schleswig-Holstein, Hessen, Hannover y varios otros estados alemanes, incluyendo las ciudades libres como Hamburgo y Bremen. Toda Alemania al norte del río Main quedaba unida en esta federación, cuyo primer canciller y redactor de su Constitución no era otro que Bismarck. Tras unas discusiones sobre la propuesta española de ofrecer el trono de Madrid al príncipe Leopold de Hohenzollern (la familia

del rey de Prusia), Napoleón III de Francia acabó declarando la guerra a Alemania. El ejército alemán, dirigido por Moltke, derrotó rápida y decisivamente a los franceses en Sedan (1870) y entró en París en enero de 1871. De inmediato el rey Wilhelm I de Prusia fue proclamado emperador (*Kaiser*) del nuevo (segundo) imperio (*Reich*) alemán, que abarcaba, además de todos los estados de la Federación Nortealemana, los del sur, como Baviera (Bayern) y Württemberg, así como el territorio de Alsacia y Lorena, cedido por Francia tras su derrota.

La Constitución de la Federación Nortealemana fue trasladada con apenas cambios al nuevo imperio. Bismarck seguiría siendo primer ministro del reino de Prusia y canciller del Imperio alemán. El emperador nombraba libremente al canciller. Bismarck ocupó ese cargo durante el resto del reinado de Wilhelm I (1861-1888). Wilhelm II (nieto de Wilhelm I) accedió al trono en 1888. Era muy militarista, chulo y autoritario. Quería ser su propio canciller, aun careciendo de todo sentido para la diplomacia. En 1890 Bismarck tuvo que dimitir.

En la constitución del Imperio alemán se mantenía la autonomía de los estados componentes en cuestiones internas, como la cultura y la educación. Por lo tanto, las escuelas y universidades dependían del estado respectivo. En el caso de Halle o Berlín, por ejemplo, dependían del Ministerio de Cultura de Prusia. Dentro de las fronteras del imperio se abolieron los aranceles, se unificaron las medidas y la moneda (el marco), los correos y el Derecho. Las reformas liberalizadoras de la economía acabaron con las trabas medievales y fomentaron el progreso económico, aunque luego se vieron frenadas por la presión de los grupos de interés de la industria y la agricultura, que acabaron provocando la reintroducción de aranceles externos, para protegerse de la competición exterior.

Bismarck prohibió el partido socialdemócrata como peligroso para el orden social, aunque por otro lado promulgó diversas leyes para mejorar la condición social de los trabajadores, introduciendo la seguridad social respecto a enfermedad, accidente, paro y jubilación. Al principio, Bismarck se apoyó en el partido nacional liberal y propugnó una política económica liberal. Sin embargo, ante la insistencia de los

grupos de presión, en 1878 dio marcha atrás y pasó al proteccionismo, apoyándose a partir de entonces en el partido de los católicos (el Zentrum). De hecho, fue cambiando de apoyos para sacar adelante las leyes. En la sociedad el máximo prestigio pertenecía a los aristócratas terratenientes y a los militares. El soldado era el ideal de ciudadano. El emperador era el primer soldado. Los grandes empresarios y los funcionarios (sobre todo si llevaban uniforme) también estaban bien vistos. Los funcionarios, disciplinados, trabajadores e incorruptibles, aunque pedantes y autoritarios, daban gran fortaleza interna al sistema.

La ciencia alemana alcanzó un gran nivel, poniéndose a la altura de la mejor del mundo. La revolución intelectual que condujo a la lógica moderna y la teoría de conjuntos se produjo sobre todo en Alemania por esta época, en gran parte de la mano de personajes aparentemente insignificantes (como Frege) o atormentados (como Cantor) o perdidos en oscuras instituciones provincianas (como Dedekind).

INFANCIA Y JUVENTUD DE FREGE

Gottlob Frege nació el 8 de noviembre de 1848 en Wismar, pequeña ciudad portuaria del mar Báltico, en Mecklenburg (Alemania). Su padre fue director del colegio femenino de Wismar hasta su temprana muerte, cuando fue sucedido en el cargo por su viuda y madre de Frege. Una vez terminado el bachillerato en Wismar, Frege estudió matemáticas y física en las universidades de Jena (1869-1971) y Göttingen (1871-1973). En la primera tuvo como profesores a Ernst Abbe y Karl Snell; en la segunda, a Ernst Schering y Wilhelm Weber, cursando también algunas asignaturas de filosofía (con el kantiano Kuno Fischer en Jena y con el idealista Hermann Lotze en Göttingen). En 1873 se doctoró en matemáticas en Göttingen (bajo la dirección de Schering) con una tesis «sobre una representación geométrica de las figuras imaginarias en el plano» (*Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*).

En Jena la salud de Snell dejaba que desear y alguien tenía que dar sus clases de matemáticas. Abbe no podía hacerlo, pues estaba dema-

siado ocupado, por lo que la Facultad facilitó la pronta habilitación de Frege, que tuvo lugar en 1874 en Jena (bajo el decanato del famoso biólogo darwinista Ernst Haeckel) con un escrito sobre «métodos de cálculo basados en una extensión del concepto de magnitud» (*Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*). A continuación, Frege fue nombrado docente sin sueldo (*Privatdozent*) de la Universidad de Jena, iniciando así su larga y poco exitosa carrera académica en esa universidad, en la que permanecería hasta su jubilación (en 1918).

Ernst Abbe

La revolución industrial había empezado en Inglaterra a finales del siglo XVIII y de allí había pasado, a mediados del siglo XIX, a otros países, como Estados Unidos, Alemania y Francia. La industrialización inglesa había sido obra de técnicos practicones y hombres de negocios privados. La *École Polytechnique* de París trató de dar una base científica a la industria francesa, pero de hecho formaba magníficos matemáticos y físicos con poco sentido práctico. En Alemania, en la segunda mitad del siglo XIX, cuajó un modelo de industrialización intermedio entre el inglés y el francés, en el que ciencia y empresa, teoría y práctica, cabeza y manitas, se imbricaban con resultados apreciables para ambas. En ese proceso desempeñaron un papel decisivo diversos inventores y científicos, como Siemens, Otto, Daimler, Benz, Diesel, Abbe y Schott. Pronto las empresas alemanas tenían las técnicas de producción más avanzadas, los obreros mejor formados y con frecuencia los productos de más calidad.

Hasta mediados del siglo XIX, Jena era una pequeña y somnolienta ciudad universitaria de carácter casi medieval. Sin embargo, hasta allí llegó el impulso industrial de la mano de Carl Zeiss (1816-1888), un mecánico de precisión de buena formación y notable empuje. Su ciudad natal de Weimar le negó la licencia para ejercer (pues ya había otros dos mecánicos allí), por lo que la solicitó en Jena, que se la concedió. Abrió su taller en 1846, y pronto tuvo abundante trabajo. Ani-

mado por el botánico Schleiden a construir microscopios, enseguida se puso a fabricarlos, cada vez más complejos y en mayores cantidades. Zeiss fue ampliando su negocio, cambiando de locales y contratando a más obreros. Recibió premios y distinciones académicas por la calidad de su trabajo. De todos modos, Zeiss, un hombre culto e inteligente, se daba cuenta de que su método de fabricación de microscopios se basaba en copiar lo que hacían los demás y en mejorarlo por ensayo y error, hasta obtener resultados aceptables. Eso es lo que hacían todos los fabricantes de instrumentos ópticos y no le garantizaba una ventaja duradera sobre sus competidores. Él soñaba con una manera distinta de trabajar: la aplicación del método científico al diseño y producción de los instrumentos. La física más avanzada debería conducir a un diseño racional de productos que colocase a su empresa por encima de las demás por la calidad inigualable de sus productos y la eficacia de sus métodos de fabricación. Para eso estuvo buscando un científico a la vez teórico y práctico, riguroso e inventivo, que le permitiese realizar su sueño. Y finalmente lo encontró en la persona de Abbe.

Ernst Abbe (1840-1905) era hijo de un obrero textil, que se daba cuenta de la extraordinaria inteligencia de su hijo e hizo cuanto pudo para proporcionarle estudios, cosa muy difícil, dada la penuria en que vivían entonces los obreros. De todos modos, el mismo Ernst desde muy joven se ayudaba a sí mismo y a su familia dando clases particulares y obteniendo una serie de becas creadas para él por su obvia brillantez. En 1857 inició sus estudios de matemáticas en la Universidad de Jena, que luego prosiguió en Göttingen, donde se doctoró sobre un tema de física matemática. Establecido más tarde como profesor de matemáticas y física en la Universidad de Jena, en 1866 fue abordado por Carl Zeiss, que acababa de festejar la fabricación de su microscopio número 1.000, para que le ayudase a racionalizar la producción y mejorar la calidad de los microscopios. Animado por tal encargo, durante los años siguientes Abbe alternaba su tiempo entre la fábrica de Zeiss y la Universidad, y se interesaba más y más por la óptica. Desarrolló nuevas fórmulas y teorías relacionadas con la trayectoria de la luz a través de las lentes, introdujo nuevos métodos de producción y control de la calidad, inventó y diseñó nuevos microscopios, que al

principio funcionaban peor que los antiguos, pero pronto los superaron. Carl Zeiss, dándose cuenta de que el futuro de la empresa dependía de Abbe, y temiendo que pudiera marcharse, en 1876 lo hizo copropietario de la empresa, al 50 por 100, como él. Dos años más tarde empezaron a lloverle a Abbe las ofertas de cátedras. Helmholz vino a verlo para pedirle que fuera a Berlín, donde le crearían una cátedra e instituto de óptica a su medida, pero Abbe rechazó todas las ofertas y permaneció al timón de la empresa de Zeiss, cuyo continuo crecimiento siguió pilotando con éxito. Los microscopios de Zeiss ya eran los mejores del mundo. Abbe se dio cuenta de que no se podían mejorar ya más con los vidrios disponibles. Había que crear vidrios nuevos con propiedades ópticas diseñadas en función de las necesidades de la óptica de precisión. Se trataba de una tarea inédita y difícil, para cuya solución buscó la ayuda de Otto Schott (1851-1935), hijo de vidriero y científico del vidrio. Después de colaborar con él a distancia mediante cartas e informes, en 1882 convenció a Schott para que se instalase en Jena, donde fundó una empresa de vidriería de precisión, que produciría las mejores lentes del mundo para Zeiss y otros clientes. Las empresas de Zeiss y Schott fueron el motor del desarrollo de Jena. En los veinticinco años entre 1885 y 1910, Jena pasó de los 11.600 a los 36.500 habitantes; la Zeiss, de 315 a 2.542 obreros; la Schott, de 6 a 1.105.

La Zeiss se había convertido en la primera empresa de instrumentos ópticos del mundo y producía pingües beneficios a Ernst Abbe, que se encontraba con mucho más dinero de lo que nunca habría podido imaginar. Abbe era un hombre profundamente preocupado por el progreso social y científico, y enseguida empezó a hacer donaciones, sobre todo a la Universidad de Jena, a la que estaba agradecido, pero cuyas limitaciones y carencias conocía desde dentro. Aunque siguió ejerciendo de profesor y director del observatorio, renunció a su remuneración. Además, empezó a subvencionar cada año a la Universidad con cantidades crecientes de dinero. En 1889 fundó la Fundación Carl Zeiss (su modestia le impedía darle su propio nombre), a la que cedió la totalidad de su capital en la empresa. Con el tiempo, la Fundación Carl Zeiss acabó poseyendo la totalidad de la empresa Carl Zeiss y la mayor parte del capital de la Schott. Enst Abbe puso mucho

cuidado en la redacción de los estatutos de la Fundación, finalmente aprobados en 1896. Por un lado, y en recuerdo de las dificultades experimentadas por su familia durante su infancia, la Fundación desarrollaría un completo programa de protección social de los obreros de sus empresas, proporcionándoles pensiones de vejez e invalidez, mejorando sus condiciones de formación y trabajo, reduciendo su jornada laboral, etc. Por otro lado, la Fundación ayudaría a las instituciones de investigación científica, sobre todo a la Universidad de Jena, que fue remozada por cuenta de la Fundación, recibiendo nuevos edificios, bibliotecas, laboratorios, etc., así como cantidades importantes de dinero para promocionar a docentes valiosos (entre los que —en opinión de Abbe y nadie más— se encontraba Frege). Incluso tras la muerte de Abbe, la Fundación siguió actuando conforme a sus intenciones y estatutos.

Frege había sido alumno de Abbe, que se había fijado en la poco habitual seriedad de su actitud, en su talento y en la precisión de sus intervenciones. Toda la carrera académica de Frege se desarrolló a la sombra protectora de Abbe [1]. Ya en 1874 fue Abbe el encargado de informar sobre la habilitación de Frege, cosa que hizo en sentido muy positivo. Cinco años más tarde, en 1879, volvió a ser Ernst Abbe quien tomó la iniciativa para dotar una plaza de profesor no numerario (*Extraordinarius*) de matemáticas en la Universidad de Jena, pensando en Frege. Para presentarse al concurso era necesario tener al menos una publicación, y eso fue el motivo inmediato de Frege para escribir y publicar su famoso *Begriffsschrift* (Ideografía). Abbe escribió el informe preceptivo, muy elogioso de la actividad docente y las cualidades intelectuales de Frege. De todos modos, nadie en la Universidad (ni siquiera Abbe) se tomó en serio su libro, por lo que Frege sufrió una gran decepción. Más de una vez incluso estuvo a punto de ser despedido de la Universidad, cosa que nunca llegó a ocurrir por la intervención protectora de Abbe, en su calidad no de catedrático, sino de benefactor de la Universidad de Jena y miembro de su Consejo Social. La

[1] Véase la amplia información al respecto en Werner Stelzner, *Gottlob Frege: Jena und die Geburt der modernen Logik*. ReFIT e.V. Jena, 1996.

devoción de Frege por Abbe fue constante y duró hasta el final de su vida, como se manifiesta en su diario íntimo de 1924, en el que Ernst Abbe es la única persona de la que Frege habla con respeto, admiración y cariño.

Cuando, en 1886, Abbe empezó a subvencionar a la Universidad de Jena, una de las condiciones que puso es que una parte de esa subvención se emplease en aumentar el sueldo mísero de Frege. Desde entonces, además de los 700 marcos de sueldo de la Universidad, Frege recibía 1.300 marcos de subvención de Abbe, aunque sin saberlo (ya que Abbe nunca quiso que se enterase), pues lo que veía es que recibía un salario de 2.000 marcos anuales. Gracias a esa subvención, al año siguiente, 1887, Frege se casó con Magarete Lieseberg, con la que no llegó a tener hijos. Y pudo emprender la redaccción de las *Grundgesetze der Arithmetik*.

El sueño de una lengua universal perfecta

La primera hazaña intelectual de Frege, la creación de la lógica moderna[2], se inscribía en el contexto de la preocupación por una lengua universal perfecta, que culminó en la época de la que nos ocupamos, y que pasamos a reseñar brevemente.

Desde el *Génesis*, que considera la diversidad de las lenguas como un castigo divino que impide la cooperación entre los hombres, hasta

[2] Esta frase requiere matización. Obviamente la lógica moderna no fue creada por una sola persona. Aparte de la tradición principal, iniciada por Frege, que apostaba desde el principio por el desarrollo de cálculos lógicos, hubo también otra tradición (incluso anterior) de tipo algebraico, asociada a nombres como Boole, Peirce y Schröder. Más adelante, ambas tradiciones confluyeron en la teoría de modelos. Por otro lado, la lógica de Frege no es aún completamente moderna en el sentido actual, pues todavía concibe el lenguaje lógico como una lengua universal y no como un lenguaje formal susceptible de investigación metamatemática desde otro lenguaje. El enfoque actual de estas cuestiones fue abriéndose camino en pensadores como Hilbert, Gödel y Tarski. De todos modos, en la medida (quizás escasa) en que tenga sentido hablar de *un* creador de la lógica moderna, Frege sigue siendo el mejor candidato a merecer tal título.

Voltaire, que la califica como «una de las mayores plagas que asolan a la humanidad», muchos han lamentado la inmensa barrrera que para la intercomunicación humana supone la multiplicidad de las lenguas.

Si el vulgo espeso y municipal estaba condenado a no traspasar nunca el agujero de su propia etnicidad, al menos la comunidad occidental de los sabios y eruditos tenía su propio instrumento de comunicación universal: el latín. Durante la Edad Media, el Renacimiento y el Barroco, el latín era la *lingua franca* de las universidades, del derecho, de la teología, la ciencia y la filosofía. Desde Tomás de Aquino hasta Spinoza, y desde Vesalio hasta Newton, casi todos los textos se escribían en latín y todas las clases se daban en latín. Todavía en el siglo XIX el gran matemático Gauss escribía sus obras en latín, y en latín se presentaban la mayoría de las tesis doctorales en Alemania y Francia. Pero el latín era una lengua complicada y difícil, demasiado llena de idiosincrasias e irregularidades como para permitir su uso generalizado como lengua moderna auxiliar. Por eso, los que pretendían resucitarla para este nuevo rol proponían simplificarla y regularizarla drásticamente. Entre estas propuestas destaca el *Latino sine flexione* del lógico Peano, del que tendremos ocasión de hablar más adelante.

Los filósofos del siglo XVII, buenos conocedores del latín, eran conscientes de que esa lengua, además de ser difícil, presentaba todo tipo de defectos y ambigüedades, como cualquier otra lengua natural, defectos que solo podrían ser superados con la construcción de una «lengua filosófica» artificial.

Descartes había concebido dos posibles lenguas universales. Una lengua universal utilitaria y práctica, con una gramática simple y completamente regular, tal que «los espíritus vulgares» aprenderían a usarla (con ayuda de un diccionario) «en menos de seis horas». Y una lengua filosófica, «una lengua universal muy fácil de aprender, de pronunciar y de escribir ... y que ayudaría al pensamiento, representándole tan distintamente todas las cosas que casi resultaría imposible equivocarse; a diferencia de las palabras que ahora tenemos, que casi no tienen más que significados confusos, a los cuales el espíritu de los hombres se ha acostumbrado desde hace tiempo, lo cual es la causa de que no se entienda casi nada perfectamente. Yo considero que esta len-

gua es posible ..., y por su medio los campesinos podrían juzgar de la verdad de las cosas mejor de lo que hacen ahora los filósofos»[3].

Muchos estudiosos, desde los ingleses Dalgarno y Wilkins hasta el español Sotos Ochando, trataron de crear una lengua filosófica, aunque ninguno con tanta profundidad y rigor como Leibniz. Algunos proyectos fueron tan peregrinos como el de Sudre, que propuso una lengua universal cantable, *Solresol*, basada en las siete notas de la música.

Según Leibniz, todas las ideas complejas son combinaciones de ideas simples, lo mismo que todos los números naturales son productos de números primos. El programa leibniziano era ambicioso: habría que analizar todas las ideas del espíritu humano, hasta reducirlas a sus presuntos componentes elementales, las ideas simples. A continuación habría que confeccionar un catálogo completo de todas las ideas simples. Además, habría que elaborar una gramática racional que reflejara perfectamente las relaciones lógicas entre las ideas. Si asignamos números primos a las ideas simples, entonces cada idea compuesta será representada por el producto de los números primos correspondientes a sus ideas componentes. Como cada número natural es unívocamente descomponible en factores primos, así también, dado el número de cualquier idea compuesta, podremos averiguar inmediatamente cuáles son las ideas simples de que se compone. Un enunciado o pensamiento de la forma sujeto-predicado será verdadero si y solo si el número del sujeto es divisible por el número del predicado. Todas las verdades conceptuales quedarían así representadas por verdades aritméticas. El programa leibniziano (que adelanta ideas de Gödel), tan grandioso como impracticable, nunca llegó a realizarse y ni siquiera a publicarse. Fue descubierto dos siglos más tarde entre sus manuscritos inéditos por Couturat.

Louis Couturat (1868-1914) hizo contribuciones notables a la historia y la filosofía de la matemática y de la lógica. En 1896 atrajo la atención con su obra *L'infini matématique*, en la que defendía el infinito actual cantoriano frente a las críticas finitistas predominantes en

[3] Descartes, *Lettre au P. Mersenne*, del 20 de noviembre de 1629.

Francia. Dedicó años a estudiar los manuscritos inéditos de Leibniz, de los que publicó una influyente edición parcial, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (1903), sometiendo todo su pensamiento a una nueva interpretación (coincidente en parte con la casi simultánea de Russell), que giraba en torno a la lógica, expuesta, por ejemplo, en *La logique de Leibniz* (1901). Introdujo la nueva lógica en Francia y fue uno de los organizadores del I Congreso Internacional de Filosofía celebrado en París en 1900. Decidido partidario de la idea de una lengua auxiliar universal, escribió junto con Léopold Léau una obra inmensa, dedicada a estudiar sus antecedentes, *Histoire de la langue universelle* (1903), y fue el principal autor del proyecto de lengua artificial *ido*, una versión perfeccionada del esperanto. El caso de Couturat, como el de Peano, muestra la imbricación entre el proyecto de lengua universal y el inicio de la nueva lógica.

Todas las lenguas artificiales filosóficas o a priori resultaron ser inviables. No hay un catálogo de ideas simples del espíritu humano. Las relaciones entre conceptos son variopintas, y no se reducen a la simple yuxtaposición. Una lengua filosófica dependería del estado actual de la ciencia, que siempre está cambiando, por lo que carecería de toda estabilidad. Además, esos proyectos ignoran los constreñimientos biológicos y psicológicos que el aparato cognitivo humano impone a toda lengua practicable.

El fracaso del programa apriorístico abrió el camino a las propuestas de lenguas artificiales universales de tipo «empírico» o a posteriori, inspiradas en las lenguas naturales, aunque mucho más fáciles de aprender y usar que estas, debido a su mayor regularidad y simplicidad. Renouvier analizó agudamente el problema de la lengua universal, que debería ser «filosófica por su gramática, pero empírica por su vocabulario». Esa lengua debía constituirse definitivamente en cuanto a su forma, pero solo provisionalmente en cuanto al vocabulario, que debía adoptar las raíces más comunes de las lenguas naturales. Jacob von Grimm, fundador de la gramática histórica, hablaba de «las ventajas extraordinarias que resultarían para todo el género humano de la formación y adopción de una lengua universal», cuyas características él enumera con claridad. Ninguna lengua natural las satisface, por lo que

una artificial se haría necesaria. Ha habido más de cuarenta proyectos de lengua universal, de los cuales los más famosos son el *volapük* y el *esperanto*.

El *volapük* (lengua mundial) fue propuesto por monseñor Schleyer en 1880, y tuvo un gran éxito inicial. En 1888 ya había un millón de volapükistas y 283 sociedades o clubes que lo promocionaban. Pero enseguida empezaron a multiplicarse los intentos divergentes de reforma, que ocasionaron la fragmentación y fracaso del movimiento. Posteriormente, Rosenberg rehizo completamente el volapük, transformándolo en una lengua muy distinta y mejor, el *idiom neutral*.

La más exitosa de las lenguas artificiales ha sido *la linguo internacia de doktoro Esperanto*, propuesta por Zamenhof en 1887. Nacido en una esquina de Polonia (ahora Bielorrusia) agitada por permanentes conflictos entre las comunidades polaca, rusa, alemana y judía que la habitaban, aisladas unas de otras por la diversidad de sus lenguas, Zamenhof decidió dedicarse al ideal de facilitar la comunicación entre todos los humanos mediante la creación y difusión de una lengua internacional auxiliar. El esperanto tuvo una gran difusión. En vista del fracaso del *volapük* por sus centrífugas reformas, los miembros de la Liga Esperantista decidieron por votación en 1894 no aceptar ninguna reforma de la versión inicial del esperanto, ¡aunque fuera una reforma propuesta por el mismo Zamenhof! Con ello el esperanto quedó como momificado. Más adelante, y aparte de la Liga, varios filósofos y lingüistas (sobre todo Couturat) definieron una versión mejorada y simplificada del esperanto original, llamada *ido*. *Ido* es probablemente el mejor proyecto existente de lengua universal auxiliar. Todavía hoy el diccionario francés de filosofía de Lalande recoge para cada palabra su raíz internacional en *ido*.

La lengua universal debe ser única y debe ser enseñada en todas partes, pero ninguna de las lenguas artificiales propuestas logró ese objetivo. Como alternativa se ofrecía la de tomar una imperfecta lengua natural y tratar de simplificarla. Aunque el francés había sido la lengua de más prestigio y uso en el siglo XVIII, ese rol había sido asumido ahora por el inglés. Entre 1925 y 1932 el lingüista Ogden inventó el *basic english*, con un vocabulario de 850 palabras frecuentes y una gramática

simplificada, con la intención de que sirviera de lengua auxiliar internacional. Sin embargo, la mayoría de los extranjeros prefirieron aprender el inglés real más bien que el *basic english*, que acabó desapareciendo del mapa.

El sueño de una lengua filosófica que permita el razonamiento infalible es una utopía inalcanzable. El ideal de una lengua empírica artificial simple y regular, que sustituya con ventaja o acompañe a todas las lenguas naturales y facilite la comunicación humana, solo habría cuajado con un gobierno mundial que la hubiese respaldado vigorosamente. En el mundo imperfecto en que vivimos, a los que miramos con simpatía el proyecto de una lengua universal no nos queda más remedio que apuntarnos al carro del inglés como lengua auxiliar. Sin embargo, y curiosamente, este sueño de la lengua perfecta dio su fruto parcial pero brillante con el nacimiento de la nueva lógica.

Creación de la lógica moderna

La importancia de Frege en la historia del pensamiento se debe en primer lugar al hecho universalmente reconocido de haber sido el fundador de la lógica moderna, que vino a sustituir a la lógica antigua, creada por Aristóteles. Al final de su libro *Sobre las refutaciones sofísticas*, Aristóteles manifestaba su orgullo por haber sido el primero que había estudiado sistemáticamente los razonamientos, habiendo tenido que partir de cero en esa investigación, en la que carecía de precedentes. En efecto, Aristóteles fue el creador de la lógica, en su versión tradicional, y su creación permaneció vigente durante más de dos mil años. Esa hazaña aristotélica solo es comparable con la de Frege, que en 1879 fundó[4] la lógica moderna o lógica matemática, con la publicación de *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Ideografía. Un lenguaje de fórmulas, similar al aritmético, para el pensamiento puro). Como señala Michael Dummett, esta obra seminal «es asombrosa porque no tiene precedentes:

[4] Recuérdese la matización introducida en la nota 2.

parece haber surgido del cerebro de Frege no fertilizado por influencias externas»[5].

En el prólogo de *Begriffsschrift*, Frege sitúa su proyecto en la tradición leibniziana. Señala que el proyecto leibniziano de una lengua universal perfecta que evite los errores y sustituya el razonamiento por el cálculo es demasiado ambicioso y no puede realizarse de una vez. En los símbolos de la aritmética, la geometría y la química ve realizaciones parciales y periféricas del proyecto, al que él quiere contribuir con el esqueleto central, formado por su ideografía lógica, que más adelante podrá ser extendido en diversas direcciones. Frege pretendía liberar al pensamiento de las ataduras y trampas del lenguaje ordinario: «Si una de las tareas de la filosofía consiste en romper el dominio de la palabra sobre el espíritu humano, mediante el descubrimiento de las ilusiones que surgen del uso del lenguaje», su ideografía podrá ayudar poderosamente en esa tarea.

El objetivo final de Frege consistía en reducir la aritmética (y el análisis matemático) a la lógica, definiendo las nociones aritméticas a partir de nociones puramente lógicas, y deduciendo los teoremas de la aritmética a partir de principios lógicos. Como la lógica tradicional no bastaba para llevar a cabo esa tarea, se vio impulsado a crear una nueva lógica, suficientemente precisa, flexible y potente como para poder desarrollar gran parte de la matemática a partir de ella. De hecho, en *Begriffsschrift* aparecen por primera vez, y de golpe, varios de los análisis, conceptos y métodos característicos de la lógica actual.

Frege ofrece implícitamente el primer análisis veritativo-funcional de los conectores lógicos. Los conectores son las conjunciones 'no', 'y', 'o', 'si ..., entonces', etc. Hoy los libros elementales de lógica suelen empezar definiéndolos como functores veritativos. Por ejemplo, para cualquier enunciado *A*, *no A* es verdadero si y solo si *A* es falso. Para cualesquiera enunciados *A* y *B*, *A o B* es falso si y solo si tanto *A* como *B* son falsos; en los demás casos, es verdadero. *Si A, entonces B* es falso si y solo si *A* es verdadero y *B* es falso; en los demás casos es verdade-

[5] Michael Dummett, *Philosophy of Language*, Duckworth, Londres, 1973, pág. XVII.

ro. Frege elige los conectores 'no' y 'si ..., entonces' como primitivos, y en función de ellos define los demás, como 'o'. Por ejemplo, *A o B* se define como *si no B, entonces A*. Este tipo de análisis aparecen en Frege por primera vez, aunque se pueden encontrar antecedentes entre los antiguos estoicos y en Boole. El estudio de las relaciones lógicas entre enunciados que solo dependen del significado de los conectores se llama lógica conectiva (o proposicional o de enunciados o de orden cero).

A Frege se debe también el primer análisis de las proposiciones simples como la aplicación de una relación o predicado lógico (una función, en su terminología) a uno o varios argumentos, en vez del análisis tradicional en sujeto y predicado gramatical, lo que resulta especialmente fecundo en el caso de los enunciados relacionales, como «Alicia está enamorada de Pedro», donde 'está enamorado de' es la relación, y 'Alicia' y 'Pedro' son los argumentos. George Boole (1815-1864) había intentado matematizar la lógica mediante su 'álgebra de la lógica', que sin embargo solo abarcaba lo que ahora llamaríamos la lógica de predicados monarios (de primer orden), es decir, más o menos lo mismo que la silogística aristotélica y medieval, es decir, los razonamientos sin relaciones. Esta lógica limitada no nos permite inferir de que los caballos son mamíferos que las cabezas de caballos son cabezas de mamíferos, o de que alguien ama a todos que cada uno es amado por alguien. Para ese tipo de inferencias necesitamos la lógica de primer orden entera, es decir, la lógica de predicados no solo monarios, sino también n-arios cualesquiera (y en especial binarios, es decir, signos de relaciones). Los continuadores del álgebra de la lógica, como Augustus de Morgan (1806-1871), Charles Peirce (1839-1914) y Ernst Schröder (1841-1902), trataron de extenderla a cualesquiera relaciones, pero lo que hoy entendemos por lógica de primer orden (o lógica estándar) es obra de Frege.

Frege introdujo por primera vez los cuantificadores y las variables ligadas, con lo que pudo desarrollar la primera teoría coherente de la cuantificación múltiple. Todo ello le permitió analizar de un modo satisfactorio la estructura lógica de los enunciados compuestos. «Todos los animales respiran» se analiza como «Para todo x: si x es un animal,

entonces x respira» o, en símbolos [actuales], $\forall x\ (Ax \Rightarrow Rx)$. «Hay al menos un hombre que se enamora de todas las mujeres» se analiza como «Existe un x tal que x es un hombre y para todo z, si z es una mujer, entonces x se enamora de z» o, en símbolos, $\exists x\ (Hx \wedge \forall z\ (Mz \Rightarrow Exz))$.

Frege presenta por primera vez en *Begriffsschrift* un cálculo deductivo en sentido actual (es decir, un sistema formal) para la lógica conectiva, la lógica de primer orden y la de segundo orden. La distinción entre predicados de primer orden (cuyos argumentos son objetos) y de segundo orden (cuyos argumentos son predicados de primer orden) se debe también a Frege. En la lógica se distinguen niveles u órdenes, según el tipo de cuantificación (de variables cuantificadas) que se admita. Si no hay cuantificación ninguna, tenemos la lógica de orden cero o lógica conectiva. Si podemos cuantificar sobre objetos, pero no sobre clases de objetos, tenemos la lógica de primer orden, que es la lógica estándar. Si se nos permite también cuantificar sobre clases de objetos, tenemos la lógica de segundo orden. Aunque en aquella época ni Frege ni nadie se planteaba este tipo de cuestiones, nosotros podemos preguntarnos por la corrección (es decir, si todas las fórmulas deducibles son lógicamente válidas) y por la completud semántica (es decir, si todas las fórmulas lógicamente válidas son deducibles) de su cálculo lógico. La respuesta es que el cálculo lógico de *Begriffsschrift* es un cálculo correcto e incompleto de la lógica de segundo orden (como no podía ser menos, pues —como hoy sabemos— todos los cálculos de segundo orden son incompletos) que contiene un cálculo correcto y completo (o, al menos, completable, añadiendo como reglas explícitas las que regulan su uso de la sustitución) de primer orden. De hecho, su presentación no sería superada hasta cincuenta años más tarde (con la publicación del libro de Hilbert y Ackermann[6]).

Frege trató de explicar y defender el sentido de su ideografía en el prólogo de su libro y en tres artículos que publicó en los tres años siguientes: «Anwendungen der Begriffsschrift» (Aplicaciones de la escri-

[6] D. Hilbert y W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer Verlag, Berlín, 1928.

tura conceptual), «Über den Zweck der Begriffsschrift» (Sobre el propósito de la escritura conceptual) y «Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift» (Sobre la justificación científica de una escritura conceptual). Frege recalcaba que su lenguaje formal no pretendía de ninguna manera sustituir al lenguaje ordinario en general, sino solo para ciertas tareas y en campos científicos en los que tenía ventajas. Ya en el prólogo de *Begriffsschrift* compara el lenguaje ordinario con el ojo y la escritura conceptual (o lenguaje formal) con el microscopio (quizá pensando en la actividad de su protector Abbe, por entonces ya dedicado a la fabricación de microscopios): «Creo que la mejor manera de ilustrar la relación de mi escritura conceptual con el lenguaje de la vida es compararla con la relación del microscopio con el ojo. El ojo es muy superior al microscopio, si consideramos el alcance de su aplicabilidad o la flexibilidad con que se acomoda a las más distintas situaciones. Sin embargo, considerado como aparato óptico muestra muchas imperfecciones, de las que apenas nos damos cuenta debido a su íntima conexión con nuestra vida espiritual. En cuanto nuestras metas científicas plantean grandes exigencias a la precisión de la distinción, el ojo se muestra insuficiente. El microscopio, por el contrario, está perfectamente adaptado a tales menesteres, aunque precisamente por ello es inaplicable a todos los demás»[7]. Tres años después, en un artículo «Sobre la justificación científica de la escritura conceptual» publicado en una revista filosófica, compara el lenguaje ordinario con la mano, y el formal con la herramienta: «Los defectos señalados tienen su fundamento en una cierta blandura y maleabilidad del lenguaje, que por otro lado es la condición de su desarrollo y de su múltiple aplicabilidad. El lenguaje puede ser comparado en este sentido con la mano, que, a pesar de su adaptabilidad a todo tipo de tareas, a veces no nos basta. Por eso nos creamos manos artificiales, herramientas para tareas específicas, que trabajan más precisamente de lo que podría hacer la mano. ¿Cómo es posible tal precisión? Precisamente por la rigidez de la herramienta, por la inmutabilidad de sus partes, es decir, por las propiedades cuya ausencia en la mano explica su versatili-

[7] G. Frege, *Begriffsschrift*, Halle, 1879. *Vorwort*, pág. XI.

dad. Tampoco nos basta el lenguaje de palabras. Necesitamos un sistema de signos, del que cualquier ambigüedad esté ausente, y a cuya estricta forma lógica no se le pueda escapar el contenido»[8].

La extraordinaria importancia del libro *Begriffsschrift* en la historia de la lógica solo fue valorada mucho más tarde. En el momento de su publicación no fue reconocida ni siquiera por Ernst Abbe, su protector, que había tomado la iniciativa para dotar la plaza de profesor no numerario a cuyo concurso iba destinado el libro y que escribió el informe favorable sobre Frege, aunque sin llegar a alabar su recién publicado escrito: «No puedo considerar que esta primera publicación de mi colega sea un inicio afortunado de su actividad de escritor, pues presumiblemente será leída por pocos y entendida por todavía menos»[9], escribe en su informe, por lo demás muy elogioso de la actividad docente y las cualidades intelectuales de Frege. De hecho, el libro pasó bastante inadvertido, y los pocos comentarios que suscitó se basaban en la incomprensión y el malentendido, a pesar de la gran claridad y precisión con que estaba escrito. Seguramente los signos novedosos y bidimensionales del formalismo de Frege espantaban a los posibles lectores, que no se daban la molestia de dominarlos. Con todo ello Frege sufrió una gran decepción, la primera de una serie de decepciones que acompañaron a su carrera científica y que contribuyeron a acentuar su carácter tímido, huraño y solitario.

Los símbolos lógicos de Frege

El lenguaje formal (o ideografía) de Frege no pretende ser una traducción del lenguaje ordinario, sino una representación directa de los

[8] G. Frege, «Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift». *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 1882*, pág. 52.

[9] En Werner Stelzner, *Gottlob Frege: Jena und die Geburt der modernen Logik*, pág. 98.

contenidos del pensamiento, en especial del pensamiento matemático. Aunque las nociones lógicas introducidas por Frege resultaron muy superiores a todo lo conocido hasta entonces y básicamente se han mantenido hasta nuestros días, los símbolos gráficos concretos que eligió tuvieron escasa fortuna y nula aceptación, sobre todo por su carácter farragosamente bidimensional, que complica mucho su escritura y composición tipográfica. Nadie los usó aparte de su autor. Los demás prefirieron el formalismo lineal introducido más tarde por Peano. De todos modos, he aquí una lista de los principales símbolos lógicos usados por Frege, indicando la función que expresan (que aplica los valores veritativos, lo verdadero o lo falso, a ciertos argumentos) y su traducción al formalismo actual.

El signo de identidad, ≡, corresponde a nuestro signo =, que más adelante el mismo Frege pasó a utilizar. Expresa la función que da como valor lo verdadero si y solo si ambos argumentos son el mismo objeto.

El signo de contenido, —, que nosotros no empleamos, y que expresa la función redundante que da como valor lo verdadero si y solo si el argumento es lo verdadero.

El signo de negación, |, normalmente escrito bajo el anterior, ┬, expresa la función que da como valor lo falso si el argumento es lo verdadero, y lo verdadero, si el argumento es lo falso. Nosotros usamos el signo ¬.

El signo de condicional ┬, que expresa la función que da como valor lo falso, si el primer argumento (escrito abajo) es lo verdadero y el segundo argumento (escrito arriba) es lo falso. En cualquier otro caso, da como valor lo verdadero. Nosotros usamos el signo ⇒.

El cuantificador universal, ⌣, que (en el caso más simple y frecuente) expresa una función sobre los conceptos de primer orden. Esta función da como valor lo verdadero si y solo si el argumento es un concepto de primer orden que tiene como valor lo verdadero para cada uno de sus argumentos (objetos). Nosotros usamos el signo ∀.

Estos son todos los signos lógicos primitivos que utiliza Frege en *Begriffsschrift* (1879). En función de ellos puede definir otros, como la

conjunción o la disyunción o el cuantificador existencial. En *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903) introduce dos nuevos signos lógicos primitivos:

El signo de recorrido, ', que expresa la función de segundo orden que a cada función de primer orden, φ(ε), tomada como argumento, le aplica como valor su recorrido, 'εφ(ε). Frege no define la noción de recorrido de un modo claro, pero indica que dos funciones tienen el mismo recorrido si y solo si ambas aplican los mismos valores a los mismos argumentos. En especial, dos conceptos tienen el mismo recorrido (en el sentido fregeano) si tienen la misma extensión (en el sentido habitual). En la medida en que 'εφ(ε) denota la extensión del concepto o función proposicional φ, ahora usamos para designarla el signo {x|φ(x)}.

El signo de descripción o caracterización, \, que juega el papel del artículo determinado. Ahora se usa el signo ι (la iota griega).

Resumen de los signos primitivos:

Lectura	Signo de Frege	Signo actual
a igual a *b*	*a*≡*b*	*a*=*b*
φ	—φ	φ
no φ	┬φ	¬φ
si φ, entonces ψ	┬┬ψ / └φ	φ⇒ψ
para cada *x*	‿*x*‿	∀*x*
(la clase de) los φ	'εφ(ε)	{*x*|φ(*x*)}
el φ	\φ	ι *x* φ

Algunos signos derivados:

φ y ψ	┬┬φ / └ψ	φ∧ψ
φ o ψ	──┬φ / └┬ψ	φ∨ψ
para algún *x*	┬‿*x*‿┬	∃*x*

El cálculo deductivo de Frege

El *Begriffsschrift* de Frege contiene el primer cálculo deductivo correcto y completo de la lógica de primer orden. Se trata de un cálculo axiomático, que consta de nueve axiomas y tres reglas de inferencia. Frege, naturalmente, lo expone con sus propios signos, ahora inusuales. Nosotros lo exponemos aquí traducido a los signos lógicos habituales. Además, Frege lo formula con variables proposicionales e individuales, pero se olvida de formular la correspondiente regla de sustitución. Nosotros neutralizamos su olvido, formulándolo con metavariables (letras griegas) para fórmulas cualesquiera (φ, ψ, χ) y para términos (nombres de objetos) cualesquiera (τ). Primero formulamos los axiomas, escribiendo a la izquierda un número correlativo y a la derecha el número que tienen en el *Begriffsschrift*. Luego formulamos las reglas de inferencia.

Axiomas

(1)	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$	(1)
(2)	$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$	(2)
(3)	$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$	(8)
(4)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	(28)
(5)	$\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$	(31)
(6)	$\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$	(41)
(7)	$\tau = \sigma \Rightarrow (\varphi(\tau) \Leftrightarrow \varphi(\sigma))$	(52)
(8)	$\tau = \tau$	(54)
(9)	$\forall x.\varphi(x) \Rightarrow \varphi(\tau)$	(58)

Reglas de inferencia

(Modus ponens) $\varphi \Rightarrow \psi$, φ / ψ (p. 8)

(Generalización) $\dfrac{\varphi}{\forall x\, \varphi(x)}$ (p. 21)

(Gen. condicional) $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi}{\varphi \Rightarrow \forall x\, \psi(x)}$ (p. 21)

Las últimas dos reglas están sometidas a ciertas condiciones de aplicación.

LOS NÚMEROS NATURALES EN FREGE

Ese mismo año 1879 en que publicó *Begriffsschrift*, Frege fue nombrado profesor no numerario (*ausserordentlicher Professor*) de la Universidad de Jena. En los años siguientes se dedicó básicamente a dos tareas: la fundamentación de la aritmética y la aclaración de las nociones semánticas.

Toda la obra —incluso toda la vida— de Frege estuvo dedicada al esfuerzo por entender a fondo qué son los números naturales y de dónde les viene a los teoremas aritméticos su peculiar e incomparable seguridad. Su lógica misma es la culminación natural de las tendencias al incremento del rigor que caracterizaron a la matemática del siglo XIX. Su preocupación obsesiva por la lógica y la matemática le duró toda su vida. Wittgenstein, que lo había visitado varias veces entre 1911 y 1913, cuenta: «Frege no hablaba nunca más que de lógica y matemáticas. Si yo empezaba a hablar de otro tema, me cortaba con una frase cortés y enseguida volvía a llevar la conversación a la lógica y las matemáticas» [10].

La gran hazaña intelectual de la aritmetización del análisis y de la reducción de los números complejos, reales, racionales y enteros a los números naturales planteaba el reto de dilucidar lo que sean los núme-

[10] Peter Geach: Gottlob Frege, en Anscombe y Geach: *Three Philosophers*, Oxford, 1963, pág. 129.

ros naturales. Kronecker pensaba que bastaba aceptarlos como evidentes, como dados, como creados por Dios, pero esa respuesta no podía satisfacer a los espíritus más inquisitivos.

Cantor y Frege fueron los primeros (en 1884) en proponer[11] teorías de los números naturales. En sus *Beiträge*, Cantor introdujo los números naturales como cardinales finitos, aunque carecía de una definición general de finitud. La única que había dado previamente (la de que un conjunto bien ordenado es finito si y solo si su tipo de orden es idéntico al inverso) no vale para conjuntos en general, ni siquiera para conjuntos ordenados, como muestra el caso de η (el tipo de orden de los números racionales). Por tanto, no puede decirse que Cantor hubiese dado una solución satisfactoria al problema. Más denodados fueron los esfuerzos de Frege por aclarar la naturaleza de los números naturales, que a continuación expondremos.

En 1884 publicó Frege *Die Grundlagen del Arithmetik. Eine logisch- mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Los fundamentos de la aritmética. Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número). Considerada por Dummett[12] como la obra maestra de Frege, con ella se inicia la filosofía de la matemática, tal y como la entendemos hoy. En ella, Frege propuso el programa logicista y, de paso, introdujo una serie de análisis conceptuales que inauguraron la filosofía de la lógica. Bertrand Russell ha escrito: «La cuestión de qué sea un número natural ha sido planteada con frecuencia, pero solo ha encontrado una respuesta correcta hasta ahora: la dada por Frege en 1884, en su libro *Die Grundlagen der Arithmetik*»[13]. Y Ernst Zermelo, el fundador de la teoría axiomática de conjuntos, no ha vacilado en afirmar que esta obra contiene lo mejor y lo más claro que nunca se haya escrito sobre el concepto de número[14].

[11] Al menos públicamente, pues Dedekind ya había desarrollado sus ideas en los años 1870, aunque sin publicarlas.

[12] Michael Dummett, *Truth and other Enigmas*, Duckworth, Londres, 1978, pág. 90.

[13] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, 1919, pág. 11.

[14] Ernst Zermelo, en su nota a la recensión de *Die Grundlagen der Arithmetik* por Cantor, publicada en Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* (ed., E. Zermelo), Berlín, 1932, pág. 441.

La primera mitad del libro está dedicada a una crítica implacable y devastadora de las opiniones anteriores (empiristas, psicologistas y «formalistas») sobre los números y las verdades aritméticas. Los números no son cosas materiales, ni conjuntos, montones o configuraciones de cosas materiales, ni propiedades de cosas materiales. Pero tampoco son algo subjetivo. Y no se confunden en modo alguno con los signos que se refieren a ellos. La segunda mitad del libro desarrolla su propia concepción de lo que son los números, y de lo que es la aritmética. Según Frege (que escribe antes de que Peano axiomatizara la aritmética [15] mediante los llamados axiomas de Peano), la aritmética no necesita de principios propios, pues ya se sigue de los principios generales de la lógica. De ahí su absoluta seguridad: es tan segura como la lógica misma, no se basa en hipótesis especiales.

¿Qué son, pues, los números, según Frege? Siguiendo su propio principio de no preguntar por el significado de las palabras aisladamente, sino sólo en el contexto de los enunciados en que aparecen, Frege constata que los enunciados numéricos dicen algo no acerca de objetos, sino acerca de conceptos. En efecto, los números no se dicen de las cosas, sino de los conceptos. Si decimos que la Tierra tiene un satélite natural, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que en la biblioteca municipal hay veinte mil libros, estamos diciendo algo de conceptos: que bajo el concepto «satélite natural de la Tierra» cae un objeto, bajo el concepto «planeta de nuestro sistema solar» caen nueve objetos, bajo el concepto «libro de la biblioteca municipal» caen veinte mil objetos.

En una primera aproximación [16], y en el contexto de un enunciado del tipo «el número *n* corresponde al concepto *P*», Frege propone definir recursivamente los números naturales del siguiente modo:

a) El número 0 corresponde al concepto *P* si ningún objeto cae bajo *P*.

[15] Para su axiomatización de la aritmética, Peano se inspiró en el análisis y la caracterización lógica de los números naturales por Dedekind. Dedekind mismo no propuso axiomas, pues no pensaba que la aritmética los necesitase, ya que era logicista, como Frege, y consideraba que los teoremas aritméticos ya se siguen de la pura lógica.

[16] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 55.

b) El número $n+1$ corresponde al concepto P si hay un objeto a, tal que a cae bajo P y el número n corresponde al concepto «cae bajo P, pero es distinto de a».

Así solo habríamos definido cada número natural n en enunciados del tipo «el número n corresponde al concepto P», pero no en las ecuaciones, que constituyen el tipo más frecuente de expresión matemática. Y tampoco habríamos definido el concepto de número, en general. La primera aproximación es, pues, insuficiente.

La dilucidación definitiva del concepto de número por Frege se realiza en dos etapas: en la primera se define el concepto de número cardinal, en general; en la segunda, se precisa el de número natural o finito.

La idea central de Frege consiste en aplicar implícitamente el proceso de construcción de un espacio cociente mediante una clase de equivalencia para obtener una definición de número cardinal. Ello exige contar con un dominio previamente dado de elementos y definir en él una adecuada relación de equivalencia. Como dominio de elementos elige Frege la clase de todos los conceptos. (Frege todavía no era consciente de los peligros de admitir clases tan enormes.) Como relación de equivalencia entre conceptos define Frege la relación de biyectabilidad [en su terminología, de equinumerosidad (*Gleichzahligkeit*)]: el concepto P *es biyectable con* el concepto Q si y solo si hay una biyección (o aplicación biunívoca, *beiderseits eindeutige Zuordnung*) entre los objetos que caen bajo P y los objetos que caen bajo Q. En otras palabras, P es biyectable con Q si y solo si hay una relación que relaciona cada objeto que cae bajo P con un (y solo un) objeto que cae bajo Q, y a la inversa. Está claro que la relación de biyectabilidad es una relación de equivalencia. Por tanto, da lugar a una partición de la clase de los conceptos en clases de equivalencia, a las que Frege llama números cardinales. El número cardinal de un concepto P no es sino la clase de equivalencia de P respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con P. Es lo que Frege expresa en su peculiar terminología diciendo que el número que corresponde a un concepto P es la extensión del concepto «equinumérico con P» [17]. De

[17] *Ibíd.*, § 68, § 72.

hecho, Frege no dispone explícitamente de la noción de clase de equivalencia. Su exposición sigue el siguiente orden: primero define la relación de equinumerosidad (o biyectabilidad); en función de ella define la noción de *número del concepto ...*, en función de la cual define a su vez *número*, en general: una cosa es un número si y solo si hay algún concepto *P*, tal que esa cosa es el número de *P*. Esta definición no es circular, pues la noción de *número del concepto ...* se define con independencia de la de *número*.

Con esto queda definido el concepto de número (cardinal) en general, finito o infinito. Pero la aritmética trata de los números naturales, es decir, de los números finitos. Ahora bien, la elucidación del concepto de número natural en Frege requiere algunas definiciones previas.

El 0 se define como el número correspondiente al concepto «distinto de sí mismo»[18]. En otras palabras, el 0 es la clase de todos los conceptos vacíos, es decir, de todos los conceptos bajo los que no cae objeto alguno. El 1 se define como el número que corresponde al concepto «igual a 0». En otras palabras, el 1 es la clase de todos los conceptos unitarios, es decir, de todos los conceptos bajo los que cae un solo objeto. Que *n es el siguiente de m* significa, según Frege, que hay un concepto *P* y un objeto *a* que cae bajo él, tales que *n* es el número de *P* y *m* es el número del concepto «cae bajo *P* y es distinto de *a*»[19].

Un vez definidos el 0 y el siguiente, Frege está en posición de darnos su definición de número natural: *n es un número natural* (o cardinal finito) significa que *n* pertenece a la serie numérica que empieza por el 0, es decir, que *n* es el 0 o *n* cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1 y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él[20].

Fácilmente se ve que los números naturales así definidos satisfacen el principio de inducción aritmética, lo cual no es de extrañar, pues la definición que acabamos de dar equivale a decir que números naturales son precisamente los objetos que satisfacen el principio de induc-

[18] *Ibíd.*, § 74.
[19] *Ibíd.*, § 76.
[20] *Ibíd.*, § 79, § 83.

ción aritmética. Este principio es uno de los llamados axiomas de Peano (en realidad, de Dedekind). También muestra Frege que los números naturales por él definidos satisfacen los principios correspondientes a los otros axiomas de Peano. En especial, muestra que todo número natural tiene un siguiente, indicando que para cada número natural *n*, el número natural que corresponde al concepto «pertenece a la serie numérica que termina con *n*» es el siguiente de *n*. Parece discutible que esto constituya una genuina demostración. Pero en *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege tampoco pretende ofrecer pruebas rigurosas.

En 1885, Cantor publicó en la *Deutsche Literaturzeitung* una recensión del libro de Frege *Die Grundlagen der Arithmetik*. Aunque en ella alababa su rechazo del psicologismo, no reconocía su gran importancia y ni siquiera lo entendía del todo. Por ejemplo, escribía: «Considero que no es correcta la opinión del autor de que lo que yo llamo cardinalidad (*Mächtigkeit*) es lo mismo que lo que él llama cantidad (*Anzahl*)». Básicamente, sí es lo mismo. Además, lo que Frege llama la extensión del concepto 'equinumérico con el concepto *F*' es lo mismo que la clase de los conjuntos equivalentes (en el sentido de Cantor) a *F*. Además, Frege contribuyó a clarificar la diferencia entre conjunto y montón, y entre la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto y la relación de inclusión en que está un subconjunto con su conjunto. Como señaló Zermelo más tarde, es lamentable que el gran matemático Cantor y el gran lógico Frege se entendieran mutuamente tan poco.

DEDEKIND

Richard Dedekind (1831-1916) nació en Braunschweig, entonces parte del reino de Hannover. Cursó dos años física y matemáticas en el Collegium Carolinum de su ciudad natal, una escuela técnica en la que ya habían enseñado su padre y su abuelo (y había estudiado Gauss). Luego se trasladó a la Universidad de Göttingen, donde fue discípulo de los grandes matemáticos Gauss, Dirichlet y Riemann, y donde se

doctoró y habilitó. Una de sus contribuciones posteriores consistió en la edición de las obras de Dirichlet y Riemann, con lo cual prestó un gran servicio a la comunidad matemática. El hecho de dedicar tanto tiempo a dar a conocer el trabajo de otros es muestra de su gran modestia. Sin embargo, también desarrolló investigaciones de gran originalidad en álgebra y teoría de números, impulsando el desarrollo de la matemática hacia una mayor abstracción y rigor, y adoptando siempre el punto de vista conjuntista y estructural.

Mientras era profesor del Politécnico de Zürich, desarrolló una construcción conjuntista de los números reales a partir de los racionales mediante lo que luego se han llamado «cortaduras de Dedekind», que publicó en *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuidad y números irracionales), publicada en 1872, como las propuestas paralelas de Cantor y de Weierstrass. El año anterior había presentado —como mero apéndice X a su segunda edición de las *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Lecciones de teoría de números) de Dirichlet— sus fundamentales contribuciones a la teoría de los números algebraicos y al álgebra abstracta, incluyendo las nociones de anillo y de ideal.

Después de haber enseñado en Göttingen y Zürich, en 1862 Dedekind aceptó una plaza de profesor en el Collegium Carolinum de Braunschweig, tan ligado a su tradición familiar. En ella permaneció desde 1862 hasta su muerte. Dedekind, tranquilo de carácter, modesto y tímido, solterón y pueblerino, se sentía bien en su pequeña ciudad natal, donde gozaba de la conveniencia de vivir con su familia (sus padres y su hermana mayor). Era aficionado a la música, tocaba el violoncelo y el piano, y también le gustaba la lectura y jugar a los bolos. A pesar de que el Collegium Carolinum era una mera escuela técnica en la que la matemática no ocupaba una posición importante, Dedekind rechazó las ofertas de cátedras universitarias que se le hicieron desde otras ciudades alemanas (entre ellas, la de Halle, impulsada por Cantor). Quizás influía en ello también la poca simpatía con que había contemplado la anexión del reino de Hannover por el estado prusiano. En 1867, poco después de consumarse dicha unión a la Federación Nortealemana, escribía Dedekind en una carta: «Siempre es muy agradable pertenecer al partido vencedor, y las transformaciones del último

año me han hecho ver que esa ventaja constituye para muchas personas ... el único criterio para formar su opinión. En espera de un tiempo mejor, en que el Estado militar absoluto deje de considerarse el desarrollo supremo e inmejorable de nuestra vida pública, de momento me retiro de una disputa que sigue siendo infructuosa; hay que esperar a que la borrachera se aplaque un poco».

En 1888, Dedekind publicó *Was sind und was sollen die Zahlen?* (¿Qué son y para qué sirven los números?), aunque el trabajo allí presentado data de diez años antes. Frege escribió en 1893 sobre esta obra que es «lo más profundo que he visto en los últimos tiempos sobre la fundamentación de la aritmética»[21]. Sin embargo, Dedekind no se había enterado que cuatro años antes Frege había expuesto ideas parcialmente coincidentes con las suyas en *Grundlagen der Arithmetik* (1884). En el prólogo a la segunda edición de su obra, Dedekind señala: «Cerca de un año después de la publicación de mi escrito he conocido los *Grundlagen der Arithmetik* de G. Frege, aparecidos ya en el año 1884. Por distinta que sea de la mía la opinión sobre la esencia del número expuesta en esa obra, contiene, sin embargo, ... puntos de estrecho contacto con mi escrito. ... Claro que, debido al diferente modo de expresión utilizado, no es fácil reconocer la coincidencia; pero ya la resolución con que el autor se expresa sobre la conclusión de n a $\tilde{n}+1$ ... muestra claramente que se encuentra aquí en el mismo terreno que yo».

En *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Dedekind ofrece una construcción de los números naturales a partir de las nociones conjuntistas abstractas de conjunto y aplicación. Sea A un conjunto cualquiera y f una aplicación de A en A. Si B es un subconjunto de A clausurado respecto a la aplicación f (es decir, tal que $f(B)$ está incluido en B), Dedekind llama a B una cadena (respecto a f). Sea b un elemento de A. Dedekind llama la cadena de b (respecto a f) a la intersección de todas las cadenas (respecto a f) que tienen a b entre sus elementos. Dedekind dice que un conjunto N es simplemente infinito (y, por tanto, candidato a ser llamado el conjunto de los números naturales) si y solo si hay una aplicación inyectiva f de N en N, tal que N es la cadena (respec-

[21] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, tomo I, pág. VII.

to a *f*) de un elemento de *N* que no pertenece a *f*(*N*), al que llama el 1. A partir de esa definición deduce las propiedades de las operaciones (adición, multiplicación, exponenciación) con números naturales. Incluso formula y prueba un teorema de recursión, que justifica las definiciones recursivas, procedimiento que más adelante von Neumann extenderá a la recursión transfinita.

El proceder de Dedekind es impecable. Una especialización de la definición de Dedekind, con ligeras variaciones, sigue siendo la habitual en teoría de conjuntos. En vez de empezar por el 1, solemos empezar por el 0. Y elegimos una aplicación inyectiva determinada de *N* en *N*, a la que llamamos el siguiente (o sucesor) y designamos por *s*. Por ejemplo, $s(n) = n \cup \{n\}$ o $s(n) = n + 1$. A continuación definimos un conjunto inductivo como un conjunto que contiene al 0 y está clausurado respecto a *s* (es decir, junto a cada elemento contiene también a su siguiente). Finalmente definimos el conjunto de los números naturales N como la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Aparte de la fundamentación de la aritmética de los números naturales, *Was sind und was sollen die Zahlen?* incluye (en sus secciones 1-5) una presentación (probablemente la primera) de la teoría elemental de conjuntos, es decir, de las nociones básicas del lenguaje conjuntista. Así la sección 1 trata de los conjuntos (*Systeme*) en general, la 2 de las aplicaciones o funciones en general, la 3 de las biyecciones, la 4 de las aplicaciones de un conjunto en sí mismo, y la 5 contiene su famosa definición de los conjuntos finitos e infinitos, de la que trataremos en el capítulo siguiente.

PEANO

Giuseppe Peano (1858-1932) era profesor de matemáticas en la Universidad de Turín. Hizo contribuciones notables al análisis, a la teoría de funciones y a la geometría, como la famosa curva de Peano (1890), una curva continua que recorre cada punto del cuadrado de lado unidad, cuya generalización ha encontrado amplio uso en el estudio de los fractales.

En vez de tratar de generar los números naturales a partir de entidades más básicas (como habían intentado Cantor, Frege y Dedekind), Peano se propuso caracterizarlos axiomáticamente. Una tal axiomatización definiría implícitamente los números naturales, definiendo explícitamente una estructura abstracta que compartirían todos los sistemas concretos que puedan ser considerados como realizaciones alternativas de la idea de números naturales. Dedekind expuso su teoría en 1888, y un año después (1889) apareció la de Peano, que formuló sus famosos axiomas inspirándose en la definición de Dedekind.

Al año siguiente del libro de Dedekind, Peano publicó su *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Principios aritméticos, expuestos según un nuevo método, 1889), donde usa por primera vez sus nuevos símbolos formales y presenta una axiomatización de la aritmética basada en los siguientes cinco 'axiomas de Peano': (1) 1 es un número natural. (2) 1 no es el sucesor de otro número natural. (3) Cada número natural tiene un sucesor. (4) Si los sucesores de n y m son distintos, también son distintos n y m. (5) Si un conjunto A de números naturales contiene el 1 y, siempre que contiene a un número n, también contiene al sucesor de n, entonces A contiene todos los números naturales. Este último axioma es el llamado axioma de inducción. Estos axiomas siguen siendo usados desde entonces como axiomatización de la aritmética (aunque escribiendo 0 en vez de 1).

Peano también ofreció ya las habituales definiciones recursivas (previamente introducidas también por Grassmann y Dedekind) de la suma, producto y potenciación de números naturales:

$$n+1=s(n)$$
$$n+s(m)=s(n+m)$$

$$n\cdot 1=n$$
$$n\cdot s(m)=(n\cdot m)+n$$

$$n^1=n$$
$$n^{s(m)}=n^m\cdot n$$

La axiomatización de Peano está inspirada por la previa definición de Dedekind, como él mismo reconoce. Sin embargo, su mayor simplicidad y claridad, y el hecho de estar formulada en un lenguaje formal lineal y fácilmente legible, la hizo especialmente famosa, hasta el punto que los axiomas habituales de la aritmética se conocen simplemente como los axiomas de Peano (y no como los de Dedekind-Peano, como habría sido más justo).

El interés de Peano por la matemática y por los lenguajes artificiales se fundió en la creación de su sistema de notación lógica formal, diez años posterior al de Frege, pero más afortunado en su aceptación por la comunidad lógica. Quienes no lo aceptaron fueron sus estudiantes. Peano daba por entonces clase de matemáticas en la Academia Militar de Turín y, cuando empezó a utilizar el nuevo formalismo notacional en sus clases y apuntes, los estudiantes se rebelaron y exigieron su marcha, a pesar de que trató de aplacarlos, prometiéndolos el aprobado general. Ni por esas. La insurrección solo se calmó con la salida de Peano, que en 1890 aceptó una nueva plaza en la Universidad de Turín. Entre 1895 y 1905 fue publicando su *Formulaire de mathématiques* o *Formulario mathematico*, una especie de compendio de la matemática superior desde un punto de vista unitario y formal, que en cierto modo es un precedente del proyecto estructural de Bourbaki, aunque sin demostraciones. En esta obra magna usaba su nueva notación o simbología lineal de la lógica matemática, que luego sería adoptada por Russell y Whitehead y que constituye la base de la simbología lógica posterior. Se trata de una manera lineal de escribir, más sencilla que la bidimensional de Frege.

Frege criticó la simbología de Peano por primera vez en su *Lettera del Sg. Frege all'Editore*, publicada en la *Rivista di Matematica* (1896), dirigida por Peano. Luego Frege dio una conferencia sobre el mismo tema en la Real Sociedad Sajona de Ciencias de Leipzig, *Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene* (Sobre la escritura conceptual del Sr. Peano y la mía). Poco después seguía escribiendo notas privadas sobre el tema. Entre 1894 y 1903, Frege y Peano intercambiaron diversas cartas sobre la comparación de sus respectivos formalismos. Frege señala con satisfacción que su análisis de las proposiciones

universales y existenciales coincide, aunque usen simbologías distintas, pero critica algunas imprecisiones de Peano, y le muestra que en lógica se necesitan más principios que el de identidad.

Peano se interesó profundamente por el proyecto de una lengua auxiliar universal. En 1903 propuso el *latino sine flexione*, un latín regularizado y simplificado (sin declinaciones ni conjugaciones, como ya su nombre indica), y especialmente fácil de aprender y entender por los hablantes de alguna lengua románica. En los años siguientes publicó panfletos y vocabularios de esta lengua, en la que también escribió artículos matemáticos para su revista. Finalmente diseñó una lengua artificial nueva, *interlingua*, que ha tenido un número no despreciable de partidarios y ha sido usada para los resúmenes por algunas revistas científicas internacionales (antes de que se impusiera el inglés para los *abstracts*).

El programa logicista

Immanuel Kant había establecido la distinción entre juicios o enunciados analíticos y sintéticos. Basándose en el insuficiente análisis de la estructura de los enunciados ofrecido por la lógica aristotélica tradicional, Kant suponía que todos los enunciados (al menos todos los enunciados científicos) son del tipo sujeto-predicado, es decir, tienen la forma '*A* es *B*', donde *A* y *B* son conceptos. Kant pensaba también que todo concepto es una suma de características (o propiedades comunes a los objetos que caen bajo él). Kant definió los enunciados analíticos como aquellos en que el predicado está contenido en el sujeto (es decir, en que todas las características del concepto *B* son también características del concepto *A*), y los sintéticos como aquellos en que el predicado no está contenido en el sujeto (es decir, en que algunas características de *B* no se encuentran entre las características de *A*)[22]. Sin embargo, está claro que esta definición kantiana solo es apli-

[22] Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*. Einleitung IV (págs. 6 y 7 de la 1.ª edición, Riga, 1781; págs. 10-11 de la 2.ª edición, Riga, 1787).

cable a enunciados del tipo 'todos los *A* son *B*'. La *Kritik der reinen Vernunft* de Kant está fundamentalmente dedicada a analizar el *status* epistemológico de los teoremas de la aritmética, la geometría euclídea y la mecánica newtoniana. De estos teoremas se pregunta Kant si son analíticos o sintéticos (y, en este último caso, si son a priori o a posteriori). Ahora bien, esta pregunta carece de sentido si tomamos al pie de la letra la definición kantiana de analítico y sintético. En efecto, los típicos teoremas de estas teorías (enunciados como: «para cualesquiera n, m: $(n+m)^2=n^2+m^2+2nm$»; «hay al menos tres puntos distintos que no están en la misma recta»; «dos cuerpos cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia», etc.) tienen una estructura completamente distinta que los del tipo «todos los *A* son *B*», que son los únicos a los que se aplica la definición kantiana. Igualmente se puede comprobar que la concepción leibniziana y kantiana según la cual los conceptos serían definibles como sumas de características es insostenible en la mayor parte de los casos.

A pesar de que Frege formuló estas críticas[23], seguía siendo un kantiano en lo que respecta a la geometría. Además, consideraba que la distinción entre lo analítico y lo sintético seguía siendo interesante, aunque esos términos habrían de ser definidos de nuevo. Según Frege, un enunciado verdadero es analítico si puede ser probado o deducido a partir únicamente de leyes lógicas y definiciones. En caso contrario decimos que se trata de un enunciado sintético[24].

Ya en el prólogo a *Begriffsschrift*, Frege se había preguntado si los teoremas aritméticos son deducibles a partir de solo las leyes lógicas o si es preciso traer a colación hechos empíricos para su prueba. Y en *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege volvía a plantearse el mismo problema: ¿son los enunciados de la aritmética analíticos o sintéticos?

La conclusión de *Die Grundlagen der Arithmetik* se inicia con la solemne formulación de la tesis logicista: los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. Cada concepto aritmético es definible en fun-

[23] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 88.
[24] *Ibíd.*, § 3.

ción de conceptos puramente lógicos. Cada teorema aritmético es deducible a partir de leyes puramente lógicas. Calcular es deducir. La aritmética se reduce a la lógica. También Dedekind compartía estas tesis.

De todos modos, Frege reconocía que en esa obra no había probado la tesis logicista, sino que se había limitado a motivarla, exponerla y hacerla verosímil. Su demostración definitiva tendría que venir con la formalización de la lógica y con la deducción formal de los teoremas aritméticos con los solos medios del cálculo lógico. La primera tarea —la formalización de la lógica— ya había sido llevada a cabo por Frege cinco años antes, en *Begriffsschrift*. La segunda tarea —la deducción formal de los teoremas aritméticos en el cálculo lógico— quedaba pendiente. El programa logicista consistía precisamente en demostrar la tesis logicista —la reducción de la aritmética a la lógica— mediante la ejecución de esa segunda tarea.

Frege dedicó los veinte años siguientes a llevar a cabo de un modo preciso y formal el programa logicista anunciado en *Die Grundlagen der Arithmetik*. El resultado fueron los dos tomos de su obra monumental, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet* (Leyes fundamentales de la aritmética, deducidas ideográficamente), con cuya redacción Frege pensaba haber llevado a feliz término el programa logicista. En el volumen I (1893) presentaba Frege una versión revisada de su lógica e ideografía, y deducía en su cálculo lógico los principales teoremas aritméticos y los fundamentos de la teoría de los números naturales. En el tomo II (1903) ampliaba el programa a la teoría de los números reales y, por tanto, al análisis matemático.

En *Die Grundlagen der Arithmetik* se habla poco, y como de pasada, de la extensión de los conceptos (es decir, de las clases). Y no deja de resultar irónico el que Frege, que con tanta sutileza, cuidado e incluso pedantería analizaba y definía cada noción técnica que empleaba, se conformase con despachar la noción de *extensión de un concepto* en una nota a pie de página, en la que se limitaba a suponer que «ya se sabe lo que es la extensión de un concepto»[25]. En realidad, en 1884 se

[25] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 68, nota.

estaba muy lejos de saber lo que era la extensión de un concepto, y no se sospechaba siquiera cuánta complejidad y peligro encerraba la (equivalente) idea de clase.

En *Grundgesetze der Arithmetik* desempeña un papel central la noción de recorrido (*Wertverlauf*) de una función, del cual un caso particular es la extensión de un concepto (*Umfang eines Begriffes*), pues la extensión es un tipo especial de recorrido y el concepto es un tipo especial de función. Frege pensaba que a cada enunciado abierto (como «*x* ha muerto») corresponde un concepto, y a cada concepto corresponde una clase, su extensión (la clase de todos los objetos que caen bajo ese concepto). Las clases mismas son también objetos. Frege introdujo un operador de abstracción de clases a partir de conceptos, que automáticamente asignaba a cada concepto su extensión. El axioma *V* de *Grundgesetze* da por supuesta dicha existencia de clases y corresponde en su sistema al axioma conjuntista de extensionalidad: determina la transformación de la validez universal de una equivalencia entre conceptos en una ecuación entre sus respectivas extensiones.

En junio de 1902, Bertrand Russell escribió una carta a Frege, dándole cuenta del descubrimiento de la (ahora) llamada paradoja de Russell, que implicaba una contradicción en el sistema de *Grundgesetze*. Ya hemos visto que las clases o extensiones son —según Frege— objetos. Hay clases (como la clase de los perros, que no es un perro) que no se pertenecen a sí mismas. Esas clases caen bajo el concepto *P* de ser una clase que no se pertenece a sí misma. Llamemos *R* a la extensión de dicho concepto, es decir, a la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas. ¿Cae *R* bajo ese concepto *P*? Si *R* cae bajo *P*, *R* no se pertenece a sí misma, y por tanto, *R* se pertenece a sí misma. Y si *R* no cae bajo *P*, obtenemos similar paradoja. En definitiva, *R* se pertenece a sí misma si y solo si *R* no se pertenece a sí misma. En cualquier caso, obtenemos una contradicción. Esta contradicción descubierta por Russell no afecta solo al sistema de Frege, sino también a las otras teorías que emplean de un modo ingenuo o intuitivo la noción de clase o conjunto.

En vista de la fría recepción del primer volumen de *Grundgesetze*, aparecido en 1893, Frege no publicó el segundo hasta diez años más

tarde, en 1903. Mientras corregía las pruebas, añadió precipitadamente un apéndice, impregnado de tristeza y melancolía, en el que reconocía la paradoja detectada por Russell. «Nada más triste puede suceder a un escritor científico —escribe Frege— que ver cómo, después de haber terminado su trabajo, uno de los fundamentos de su construcción se tambalea»[26]. Frege no trató en modo alguno de defender su sistema, sino que reconoció con gran naturalidad el error descubierto por Russell e inmediatamente se puso a buscar vías de solución al problema. Casi al final de su larga y fecunda vida, Bertrand Russell escribió: «Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerse famosos»[27]. En su apéndice, Frege trató de remediar la paradoja modificando el axioma *V* y reemplazándolo por otro, el *V'*. Pero el *V'* implica que solo hay un objeto, y es contradictorio con el resto del sistema. Seguramente, Frege se dio pronto cuenta de ello.

Frege luchó en vano por encontrar una solución que salvase la tesis logicista y evitara la contradicción descubierta por Russell. Finalmente desesperó de poder encontrar solución al problema e incluso, poco antes de su muerte, renunció a la tesis logicista y empezó a explorar la posibilidad de encontrar en la geometría la fundamentación de la aritmética. Un año antes de su muerte, escribe en su diario: «Mis esfuerzos por aclarar lo que sean los números han conducido a un completo

[26] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Athmetik*, tomo II, pág. 253.

[27] Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard University Press, 1967, pág. 127.

fracaso»[28]. Y en el último manuscrito conservado de Frege leemos: «Me he visto obligado a abandonar la opinión de que la aritmética sea una rama de la lógica y por tanto que todo en la aritmética pueda ser probado lógicamente»[29]. No solo acabó el viejo Frege renunciando a la tesis logicista, sino que también fue consciente de que el fracaso de su construcción se debía al uso de la noción de *extensión de un concepto*, equivalente a la de clase o conjunto. Incluso llegó a sostener que no hay objeto alguno que sea la extensión de un concepto. La expresión 'la extensión del concepto *P*' —escribe Frege en otro de sus últimos manuscritos— «parece designar un objeto a causa del artículo determinado; pero no hay objeto alguno al que así pudiéramos designar correctamente. De aquí han surgido las paradojas de la teoría de conjuntos que han aniquilado esa teoría. Y tratando de fundamentar lógicamente los números, yo mismo he caído en esa trampa, al querer considerar los números como conjuntos...»[30].

La filosofía de la matemática posterior no ha dejado de dar vueltas al problema de cómo salir de la trampa en que cayeron Cantor y Frege, y aunque se han encontrado diversas soluciones técnicas, aún estamos lejos de haber alcanzado una claridad filosófica suficiente. Una cosa, sin embargo, parece cierta: la tesis logicista (es decir, la tesis fregeana de que la matemática es reducible a la lógica) es insostenible o trivial. Si se incluye la teoría de conjuntos en la lógica, entonces la tesis es trivial. Si no se incluye, entonces es falsa.

LÓGICA FILOSÓFICA Y FILOSOFÍA DEL LENGUAJE

Además de haber hecho contribuciones decisivas a la lógica y a la filosofía de la matemática, Frege introdujo las distinciones semánticas (por ejemplo, entre sentido y referencia) que lo convertirían en el fundador indirecto de la actual filosofía del lenguaje y de la filosofía ana-

[28] Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften* (ed. por Hermes, Kambartel y Kaulbach), Hamburg, 1969, pág. 282.

[29] *Ibíd.*, pág. 298.

[30] *Ibíd.*, págs. 288-289.

lítica en general. Es sin duda el primer clásico del pensamiento filosófico contemporáneo.

En el esfuerzo por desarrollar su lógica y el programa logicista, Frege se había enfrentado con el problema de la imprecisión y la confusión que rodeaba a varias nociones clave relacionadas con el análisis semántico del lenguaje aritmético y, por extensión, del lenguaje en general. Había que distinguir entre el signo y el significado, y, ya dentro del significado, entre el sentido y la referencia. Había que precisar lo que era un objeto y un concepto, una propiedad y una característica, etc. Frege trató de todas estas cuestiones en una serie de hoy famosos artículos publicados en 1891 y 1892: «Funktion und Begriff» (Función y concepto), «Über Sinn und Bedeutung» (Sobre sentido y referencia) y «Über Begriff und Gegenstand» (Sobre concepto y objeto). En 1904 apareció «Was ist eine Funktion?» (¿Qué es una función?). Las distinciones y dilucidaciones de Frege en estos artículos y otros textos relacionados lo convierten en el fundador de lo que luego se ha llamado (según los autores) lógica filosófica, semántica lógica o filosofía del lenguaje.

Las dos categorías fundamentales de la ontología fregeana son las de objeto y función. Las categorías, como nociones últimas que son, no pueden ser definidas. Frege ha de contentarse con apuntar, sugerir, poner ejemplos y esperar que el lector capte la diferencia.

Según Frege, todo lo que hay, todo acerca de lo que hablamos, o es *objeto o es función. Hay objetos y hay funciones.* No hay nada más. Función es todo lo que no es objeto; objeto es todo lo que no es función. Un objeto es algo completo o saturado —*gesättigt*—. Una función es algo incompleto o no saturado —*ungesättigt*—. Al añadir un objeto (el argumento) a una función (monaria), la completamos o saturamos, obteniendo así otro objeto, que es el valor de esa función para el primer objeto. Frege exigía que una función estuviese determinada o definida para todos los objetos sin excepción, es decir, que asignase un valor a cada uno de ellos.

Los árboles, los humanes y los planetas son objetos. También son objetos los puntos espaciotemporales, los números naturales, los conjuntos e incluso los valores veritativos (la verdad y la falsedad, o, en jerga fregeana, lo verdadero y lo falso).

La adición, multiplicación o exponenciación de números naturales son funciones, funciones cuyos argumentos son números naturales y cuyos valores son también numeros naturales. Igualmente son funciones, según Frege, los conceptos —*Begriffe*— y las relaciones —*Beziehungen*—. Los conceptos son funciones monarias (es decir, de un argumento) cuyos valores son siempre valores veritativos. Así, el concepto de ciudad de más de un millón de habitantes es una función que, por ejemplo, tiene como valor lo verdadero para los argumentos París y Londres, y lo falso para los argumentos Granada, 25, Napoleón Bonaparte y el sol. Las relaciones (binarias) son funciones de dos argumentos cuyos valores son siempre valores veritativos. Así como la adición asigna a cada par de números naturales otro número natural (su suma), la relación '... gira en torno a ...' asigna a cada dos objetos un valor veritativo, que, por ejemplo, será lo verdadero en el caso de la Luna y la Tierra, o de la Tierra y el Sol, y lo falso, si se trata de la Tierra y Marte, o del número π y el río Amazonas.

Un nombre —*Name*— o expresión nominal es una expresión lingüística que designa algún objeto determinado. Un mismo objeto puede ser designado por diversos nombres. Un functor o expresión functorial es una expresión lingüística que designa alguna función determinada. Todas las expresiones lingüísticas son nombres o functores, expresiones nominales o functoriales. Los nombres son completos o saturados, y designan un objeto. Los functores son incompletos o no saturados, y designan una función.

Hasta 1890, Frege se había contentado con distinguir entre el signo —*Zeichen*— o expresión lingüística, por un lado, y el contenido significativo —*beurteilbarer Inhalt*— del signo o expresión lingüística, por otro. A partir de 1891, Frege introdujo una estructura en el contenido significativo, distinguiendo claramente entre la referencia —*Bedeutung*— y el sentido —*Sinn*— del signo o expresión. (Generalmente, la palabra alemana *Bedeutung* equivale a la castellana *significado*, pero Frege usa *Bedeutung* en un sentido técnico especial, que no puede traducirse por significado, sino solo por referencia o denotación o designación; el significado es más bien lo que Frege llama *Sinn*, sentido.)

El objeto al que una expresión se refiere es su referencia; su peculiar manera de referirse a él es su sentido. Así, las expresiones 'la capital de España', 'la villa del oso y del madroño' y 'la ciudad natal de José Ortega y Gasset' tienen la misma referencia —Madrid—, pero distinto sentido. Así, también las expresiones

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

tienen la misma referencia —el número real *e*—, pero distinto sentido.

Frege no se conformaba con distinguir entre el sentido y la referencia de las expresiones nominales, sino que trataba de extender esta distinción a todo tipo de expresiones lingüísticas.

Según Frege, un enunciado (o sentencia) tiene como referencia su valor veritativo y como sentido el pensamiento objetivo —*Gedanke*— por él expresado, que no hay que confundir con la representación subjetiva —*Vorstellung*— que se pueda formar en la mente de quien use el enunciado. Puesto que los valores veritativos son objetos, los enunciados son nombres de los objetos (lo verdadero o lo falso) a los que se refieren. Todos los enunciados verdaderos son nombres de lo verdadero y todos los enunciados falsos son nombres de lo falso.

La mayor parte del artículo «Über Sinn und Bedeutung» está dedicado a analizar las dificultades que esta teoría del sentido y la referencia de los enunciados presenta en el caso de las citas, el estilo indirecto y las oraciones subordinadas. En este contexto aparece también la primera teoría de las descripciones.

En el artículo «Ausführungen über Sinn und Bedeutung» (Consideraciones sobre sentido y referencia), publicado póstumamente[31], Frege extiende su distinción entre sentido y referencia a las expresiones functoriales y, en especial, a las expresiones de conceptos. La referencia de una expresión conceptual no es la extensión del concepto —como en Carnap—, sino el concepto mismo. Y su sentido es algo distinto, aunque no queda claro en qué consista.

[31] Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften* (ed. por Hermes, Kambartel y Kaulbach), Hamburg, 1969, págs. 128-136.

Frege acabó con muchas confusiones tradicionales relativas a los conceptos mediante una serie de sutiles distinciones. Según Frege, un concepto es una función cuyos valores son valores veritativos. Decimos que un objeto cae o no cae bajo un concepto según que ese concepto le asigne como valor lo verdadero o lo falso. Decimos que un concepto está subordinado a otro concepto si todos los objetos que caen bajo el primer concepto caen también bajo el segundo. Esta distinción fregeana entre caer bajo un concepto —*unter einen Begriff fallen*— y estar subordinado a otro concepto —*einem anderen Begriff untergeordnet sein*— corresponde a la distinción extensional entre ser elemento de una clase y estar incluido en otra clase.

Otra famosa distinción de Frege es la establecida entre propiedad —*Eigenschaft*— y característica —*Merkmal*—. Un objeto tiene una propiedad si cae bajo el correspondiente concepto. Pero un concepto es una característica de otro concepto si entra en su definición y, por tanto, el primer concepto es una propiedad de todos los objetos que caen bajo el segundo. Así pues, el ser animal es una característica del (concepto de) humán, no una propiedad suya. El ser animal es una propiedad de objetos individuales como Sócrates o Tony Blair, no de conceptos.

Especialmente importante es la distinción de órdenes o niveles —*Stufen*— de conceptos. Bajo un concepto normal (o de primer orden) caen o no caen objetos. Pero, a su vez, un concepto normal puede no solo estar subordinado a otro concepto de primer orden, sino también caer él mismo bajo otro concepto, que, esta vez, será un concepto de segundo orden. Así, el ser médico o el ser abogado son conceptos de primer orden, pero el ser una categoría profesional es un concepto de segundo orden. El ser hidrógeno o carbono es un concepto de primer orden, pero el ser un elemento químico es un concepto de segundo orden. Y los números naturales, por ejemplo el tres o el cuatro (el tener tres o cuatro objetos), también son, según Frege, conceptos de segundo orden.

En estos artículos aparece de vez en cuando la problemática noción de recorrido —*Wertverlauf*— de una función, que es la noción menos precisa de todas las introducidas por Frege. A veces parece indicar la

extensión de un concepto en su sentido habitual y, por tanto, una parte de su dominio (la antiimagen de lo verdadero). Otras veces parece más bien referirse a su contradominio (o recorrido, en su sentido actual). En la mayoría de los casos, finalmente, más bien parece indicar la función entera, extensionalmente concebida, como clase de díadas o pares ordenados. Esta noción confusa de recorrido fue la escotilla por la que la contradicción descubierta por Russell se coló en el sistema de Frege, según ya vimos anteriormente.

En sus artículos semánticos, Frege introdujo una serie de distinciones y nociones que han sido determinantes para el desarrollo posterior de la lógica filosófica y la semántica lógica. Quizás incluso han sido demasiado determinantes, pues la insistencia de Frege en buscar para cada expresión lingüística una referencia en un mundo objetivo y extralingüístico, pero curiosamente isomorfo al lenguaje en que de él se habla, ha señalado a la posterior investigación semántica un camino que quizá resulte ser un callejón sin salida.

Hilbert y Frege sobre el método axiomático

David Hilbert (1862-1943) fue pronto reconocido como el más grande matemático viviente por la comunidad científica internacional. En 1895 obtuvo una cátedra de matemáticas en la Universidad de Göttingen, en la que permaneció hasta su muerte. Si esa universidad ya era prestigiosa antes, con su presencia se convirtió en el principal foco de la investigación matemática. El papel estelar de Hilbert en el I Congreso Mundial de Matemáticos, celebrado en París en 1900, en el que propuso su célebre lista de 23 problemas por resolver en el siglo XX, contribuyó a afianzar su enorme prestigio.

Hacia 1900, Hilbert era ya un matemático de fama mundial, coronado por el éxito profesional y la admiración de sus colegas. Frege, por el contrario, a pesar de su mayor edad —tenía catorce años más que Hilbert—, era un oscuro docente de la Universidad de Jena, que nunca llegaría a alcanzar la posición de profesor ordinario y cuya obra —intrínsecamente importante— no había logrado el reconocimiento ni la difusión que merecía.

Hilbert hizo contribuciones importantes a la teoría de invariantes, a la teoría de números, a la de ideales y a la de variedades algebraicas. En 1899 presentó la primera axiomatización satisfactoria de la geometría euclídea en *Grundlagen der Geometrie*. En 1904-1910 hizo aportaciones decisivas al análisis, desarrollando la teoría de las ecuaciones integrales. No menos espectaculares fueron sus contribuciones a la física teórica, tanto a la teoría cinética de gases, como a la teoría general de la relatividad (en cuya formulación correcta casi se adelantó a Einstein) e incluso indirectamente a la mecánica cuántica, formalizada por von Neumann sobre la base de los espacios de Hilbert, un subproducto de sus investigaciones sobre las ecuaciones integrales. En los años veinte se interesó profundamente por los fundamentos de la matemática, formulando su famoso 'programa de Hilbert' y propugnando el formalismo y la teoría de la prueba. En 1928 publicó (junto con Ackermann) el primer libro de texto moderno de lógica, que incluía un cálculo completo para la lógica de primer orden, y en 1934 publicó (junto con Bernays) los dos tomos de los *Grundlagen der Mathematik*, suma de la metamatemática de su tiempo.

En 1895, Hilbert y Frege se encontraron en la reunión de la Unión Alemana de Científicos y médicos en Lübeck, donde Frege había presentado una ponencia sobre las ventajas de su escritura conceptual frente al lenguaje ordinario y al simbolismo de Peano. Tras la conferencia, Hilbert y Frege tuvieron un breve cambio de opiniones sobre el papel de los signos en la matemática, seguido de una carta de Frege a Hilbert y una respuesta de este sobre el mismo tema. En el semestre de invierno 1898-1899, Hilbert dio un curso sobre los fundamentos de la geometría euclídea, entre cuyos oyentes se encontraba Heinrich Liebmann, que envió una copia de los apuntes del curso a Frege, que era amigo de su padre. La reacción de Frege ante las novedades metodológicas de Hilbert, manifestada en dos cartas a Liebmann, fue negativa, impresión que se confirmó tras la atenta lectura por Frege de *Grundlagen der Geometrie*, publicado poco después y que constituía una versión ampliada del curso de Göttingen que Frege ya conocía. El 27 de diciembre de 1899, Frege escribió directamente a Hilbert una larga carta, en la que sometía su libro a una crítica dura y algo pedante, acu-

sándole de falta de rigor. Hilbert debió de sentirse irritado, pero apreciaba a Frege y, armándose de paciencia, le contestó dos días después (¡qué bien funcionaba el servicio de correos!) con otra larga carta, explicando algunos aspectos esenciales del nuevo método axiomático. El 6 de enero de 1900, Frege volvió a la carga con otra prolija misiva, lúcida y agresivamente polémica, llena de críticas y discusiones de las tesis de Hilbert. Pero esta vez Hilbert se limitó a acusar recibo con una postal, por falta de tiempo para otra cosa. Hilbert se expresaba con excesiva falta de precisión para el gusto del lógico genial y pedantemente preciso que era Frege. Y Frege, que tan aguda y lúcidamente criticaba la desafortunada terminología hilbertiana, era incapaz de ver, más allá de los árboles de sus críticas de detalle, el bosque del nuevo método que Hilbert había descubierto y que iba a revolucionar la matemática. La suerte de la polémica estaba echada.

Al pasar los meses sin recibir cabal contestación de Hilbert, el 16 de noviembre, Frege volvió a insistir con otra carta, a la que Hilbert volvió a responder escuetamente, por falta de tiempo. Y ahí se interrumpió la polémica epistolar[32]. En respuesta al envío del tomo II de sus *Grundgesetze*, Hilbert escribió a Frege el 7 de noviembre de 1903, dándole las gracias y lamentando no haberlo encontrado en las últimas reuniones de matemáticos. Hilbert le indicaba que en Göttingen ya conocían la contradicción encontrada por Russell, y se ocupaban de ella, y añadía: «Ya es hora de que usted venga de una vez a Göttingen. Teniendo en cuenta lo cómodos que son hoy en día los viajes en tren, la comunicación oral es preferible a la escrita. Para esta última me falta desgraciadamente el tiempo. Y aquí hay varios jóvenes interesados en la axiomatización de la lógica». Frege ya no contestó, ni fue a Göttingen. Estaba interesado en el contacto epistolar, pero no en el personal.

Frege propuso a Hilbert la publicación de su intercambio epistolar, pero Hilbert prefería no hacerlo. Por ello Frege publicó sus objeciones en 1903 en el Anuario de la Unión Alemana de Matemáticos en forma

[32] La correspondencia entre Frege y Hilbert está reproducida en Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (ed. por Gabriel, Hermes, Kambartel, Thiel y Veraart), Hamburg, 1976, págs. 55-80).

de dos artículos sucesivos, titulados «Über die Grundlagen der Geometrie» (Sobre los fundamentos de la geometría), I y II, en los que recogía y ampliaba sus críticas a Hilbert anteriormente expresadas en sus cartas. Hilbert mismo no se dignó responder, pero A. Korselt salió en su defensa con un artículo de réplica. En 1906, Frege replicó a su vez a Korselt, publicando una serie de tres artículos con el mismo título que los anteriores, «Über die Grundlagen der Geometrie», I, II y III, en los que sus análisis resultan especialmente lúcidos y profundos, llegando a exponer las características del nuevo método axiomático iniciado por Hilbert de un modo mucho más claro y explícito de lo que nunca lo había hecho el propio Hibert, pero sin llegar a aceptar ni entender la importancia ni el sentido último del proceder hilbertiano.

El método axiomático

La esterilidad de la polémica entre Frege y Hilbert se debió fundamentalmente a la falta de comunicación producida por la ambigüedad y confusión de las palabras empleadas por ambos; que eran las mismas, pero se referían a concepciones radicalemente distintas del método axiomático: la concepción antigua o tradicional, representada por Frege, y la concepción iniciada por Hilbert y otros matemáticos de su tiempo.

La concepción antigua o tradicional del método axiomático aparece ya formulada con toda claridad en los *Analíticos posteriores* de Aristóteles y encuentra su plasmación paradigmática poco después en los *Elementos* de Euclides. Una teoría axiomática, según la entendían Aristóteles y Euclides, es un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad, conjunto organizado de tal manera que casi todos los conceptos empleados en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos indefinidos (los conceptos primitivos), y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras indemostradas (los axiomas). Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan

ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. La verdad de los teoremas se hereda de los axiomas que los implican. Aplicar el método axiomático a un ámbito determinado de la realidad consiste en organizar nuestro saber acerca de ese ámbito en forma de teoría axiomática.

Esta concepción del método axiomático permaneció básicamente inalterada hasta finales del siglo XIX, si bien algunos detalles terminológicos y epistemológicos sufrieron ciertas variaciones. Así, a los principios primeros indemostrados, a los que Aristóteles llamaba axiomas e hipótesis, Euclides los llamaba principios comunes y postulados. Con el tiempo acabó generalizándose el nombre de axioma para todos ellos. Así, también, mientras que Aristóteles pensaba que captamos la verdad de los axiomas de la geometría mediante una facultad de intelección inmediata a la que él llamaba *nous* (νοῦς), Kant consideraba que la verdad de los axiomas de la geometría se capta por una especial intuición pura del espacio. Pero en que los axiomas son verdades evidentes, captadas por algún tipo de intuición, prácticamente todos estaban de acuerdo. Incluso los empiristas extremos, que pretendían que llegábamos a los axiomas por inducción, aceptaban al menos que los axiomas eran verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad.

Frege expuso y analizó el método axiomático tradicional con más claridad y rigor que nadie, e incluso lo llevó a su perfección, precisando mediante su ideografía la noción de demostración lógica. El método axiomático clásico consistía en explicitar los axiomas (que eran proposiciones verdaderas evidentes) y en exigir que todas las demás proposiciones afirmadas en la teoría fueran demostradas a partir de esos axiomas. Pero Frege se dio cuenta que para maximizar el rigor de las demostraciones no basta con explicitar su punto de partida —los axiomas—, sino que también es necesario explicitar los métodos admisibles de demostración —las reglas de inferencia—. La unívoca explicitación de las reglas de inferencia requería a su vez la formalización o formulación regimentada de axiomas, teoremas y pruebas. Pero para Frege la formalización solo involucraba una precisión sintáctica, no un cambio semántico. Los enunciados del lenguaje ordinario eran traduci-

dos a las fórmulas del lenguaje formal, pero esas fórmulas seguían siendo enunciados verdaderos, seguían expresando ideas, seguían cargadas de contenido significativo, seguían siendo *inhaltlich*. Frege representa la culminación de la concepción tradicional del método axiomático, que él describió con rigor incomparable.

LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

En la segunda mitad del siglo XIX se había reavivado el interés por el método axiomático, al tiempo que entraban en crisis algunos de sus supuestos tradicionales. A esta crisis contribuyó poderosamente el desarrollo de las geometrías no euclídeas. Ya Gauss había descubierto la posibilidad de desarrollar geometrías distintas de la euclídea e incompatibles con ella, pero había renunciado a publicar sus resultados por miedo al escándalo de los espíritus obtusos[33]. Bolyai y Lobatchevski desarrollaron geometrías que tomaban como axioma la negación del axioma euclídeo de las paralelas, y no vacilaron en publicar sus resultados. Así pues, en la segunda mitad del siglo XIX había diversos axiomas sobre las paralelas (correspondientes a teorías geométricas distintas) incompatibles entre sí. Todos estos axiomas no podían ser verdaderos al mismo tiempo. A lo sumo uno de ellos podía ser verdadero. Entre los geómetras se fue abriendo paso la opinión de que no había más razón para considerar verdadero a uno de estos axiomas que a los otros. Por tanto, ninguno de ellos era verdadero. Y si el axioma de las paralelas no era verdadero, tampoco tenían por qué serlo los demás. Así acabó considerándose que los axiomas son unos meros esquemas abstractos, que en sí mismos no son verdaderos ni falsos. Estos desarrollos resultaban inaceptables para los defensores de la concepción clásica del método axiomático, no solo para los espíritus obtusos (como ya había previsto Gauss), sino incluso para mentes tan agudas como la de Frege.

Frege se opuso tenazmente a la nueva tendencia (que cada vez se abría más paso entre los geómetras) a considerar que en la matemática

[33] Véase, por ejemplo, la carta de C. F. Gauss a F. A. Taurinus de 1824.

hay sitio para distintas geometrías, que cada geometría describe una estructura abstracta distinta y que ninguna geometría es en sí misma verdadera ni falsa. En su escrito póstumo «Sobre geometría euclídea», redactado durante la época de su polémica con Hilbert, escribe Frege patéticamente: «Nadie puede servir a la vez a dos señores. No es posible servir a la vez a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría no euclídea es falsa; y si la geometría no euclíea es verdadera, entonces la geometría euclídea es falsa. Si por un punto exterior a una recta pasa siempre una paralela a esa recta y solo una, entonces para cada recta y para cada punto exterior a ella hay una paralela a esa recta que pasa por ese punto y cada paralela a esa recta por ese punto coincide con ella. Quien reconoce la geometría euclídea como verdadera, debe rechazar como falsa la no euclídea, y quien reconoce la no euclídea como verdadera, debe rechazar la euclídea... Ahora se trata de arrojar a una de ellas, a la geometría euclídea o a la no euclídea, fuera de la lista de las ciencias y de colocarla como momia junto a la alquimia y a la astrología... ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la geometría euclídea o a la no euclídea? Esa es la cuestión»[34]. La pregunta era retórica, pues para Frege resultaba claro que la geometría euclídea era la única verdadera y que todas las geometrías no euclídeas eran falsas.

La postura de Frege frente a las geometrías no euclídeas es completamente retrógrada y es un síntoma de su falta de comprensión y simpatía hacia las nuevas tendencias que se abrían camino en la matemática. Según el nuevo punto de vista, cada geometría describe una estructura abstracta. Los teoremas de la teoría no expresan de por sí ideas verdaderas o falsas acerca de ningún ámbito determinado de la realidad, aunque sean susceptibles de interpretación en diversos ámbitos. En definitiva, una geometría no es verdadera o falsa, aunque sí es verdadera o falsa la afirmación de que esa geometría es aplicable a un ámbito determinado de la realidad. Alguien podría haber pensado que, a pe-

[34] Gottlob Frege, *Über Euklidische Geometrie*. Publicado póstumamente en Gottlob Frege: *Nachgelassene Schriften* (ed. por Hermes, Kambartel y Kaulbach), Felix Meiner Verlag. Hamburg, 1969, págs. 182-184.

sar de todo, hay un ámbito privilegiado, el espacio físico, y que la geometría verdadera sería la aplicable en ese ámbito. Pero esa postura tampoco habría aportado consuelo duradero a los defensores a ultranza de la geometría euclídea, como Frege. En efecto, pocos años después descubriría Einstein que si identificamos los puntos con las partículas físicas y las rectas con los rayos de luz, entonces resultaba que en el espacio físico así definido lo que se cumple no es la geometría euclídea, sino la geometría de Riemann, que es una geometría no euclídea.

¿De dónde le venía a Frege su seguridad en la verdad de la geometría euclídea? De su concepción kantiana de la geometría, cuyos axiomas se captarían por una intuición pura del espacio. «Al llamar sintéticas *a priori* a las verdades de la geometría, Kant ha descubierto su verdadera esencia»[35]. Pero al juzgar que Kant había descubierto la verdadera esencia de la geometría, Frege no se equivocaba menos que el mismo Kant se había equivocado cuando juzgó que la lógica había salido perfecta e incapaz de progreso de la mente de Aristóteles. Y lo mismo que la obra de Frege era la refutación más palpable del juicio kantiano sobre la lógica, la obra de los geómetras no euclídeos y de Hilbert era la más palpable refutación del juicio de Frege sobre la concepción kantiana de la geometría. En descargo de Kant habría que decir que éste no podía conocer una lógica que se desarrollaría cien años más tarde, mientras que Frege sí conocía la geometría no euclídea. En general, la actitud de Frege respecto a la geometría es bastante paradójica. Frege, fundador del programa logicista de reducción de la matemática a la lógica, excluye por completo a la geometría de su programa. Y Frege, crítico implacable de la concepción kantiana de la aritmética, acepta sin más y como definitiva la concepción kantiana de la geometría.

[35] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, págs. 101-102. Reimpreso en G. Olms Verlag, Hildesheim, 1977.

El método axiomático abstracto o hilbertiano

Al mismo tiempo que se daban a conocer las geometrías no euclídeas, un análisis más cuidadoso de los *Elementos* de Euclides revelaba sus numerosas lagunas, que serían rellenadas en 1882 con la publicación por Moritz Pasch de la primera axiomatización lógicamente satisfactoria de la geometría proyectiva. Y diversos matemáticos de la escuela italiana —Pieri, Veronese, Peano, etc.— habían empezado a propugnar explícitamente una concepción más abstracta del método axiomático. Todos estos fermentos culminaron en 1899 con la publicación por Hilbert de sus *Grundlagen der Geometrie.*

Con Hilbert el nuevo método axiomático alcanza su madurez, al menos respecto a la práctica del mismo. En el capítulo primero de los *Grundlagen der Geometrie* Hilbert presenta los axiomas de la geometría euclídea, divididos en cinco grupos (de incidencia, de orden, de congruencia, de paralelas y de continuidad). Aquí no se hace uso de intuición ni conocimiento previo ninguno, sino que lo único que es lícito suponer de los puntos, rectas y planos, etc., es lo que explícitamente se dice de ellos en los axiomas. A la inversa, cualquier sistema de cosas de las que se pueda decir lo mismo que los axiomas dicen de los puntos, rectas, etc., puede considerarse como un modelo de la geometría. Como Hilbert indica a Frege en su carta del 29-12-1899: «Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc., cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc., y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pitágoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos»[36].

Grundlagen der Geometrie aportó muchas y notables novedades a la geometría, desde el desarrollo de la geometría plana, y en especial

[36] Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel,* Hamburg, 1976, pág. 67.

de la teoría de las proporciones, con independencia del axioma arquimediano, cuya prescindibilidad mostró Hilbert, hasta las pruebas de consistencia e independencia ya aludidas, pasando por importantes resultados sobre los teoremas de Desargues y de Pascal. Con la publicación de esta obra se impuso el nuevo método axiomático, y ello a pesar de que Hilbert no exponía en absoluto en qué consistía ese método, limitándose a aplicarlo sin comentarios. Pero, como ha señalado Freudenthal, «en el ejemplo profundamente elaborado de una teoría axiomática, como lo son los *Grundlagen,* hay una fuerza de convicción infinitamente mayor que en las exposiciones filosóficas y programáticas...»[37].

FREGE, ANALISTA DEL MÉTODO HILBERTIANO

Frege, que se oponía frontalmente al nuevo método axiomático, acompañó (sobre todo en sus artículos de 1906) sus críticas de análisis frecuentemente iluminadores y profundos de aspectos del mismo, análisis muy superiores a cuanto el mismo Hilbert había dicho de su propio método.

Así, analizando el funcionamiento de las palabras 'punto', 'recta', etc., en la geometría axiomática de Hilbert, Frege se da cuenta de que dichas palabras son como lugares vacíos que sirven para expresar generalidad, lo mismo que ocurre con las letras en el álgebra. E incluso llega a proponer y ejemplificar el uso de letras para indicar tales lugares, tal y como haríamos ahora. «Si las palabras 'punto', 'recta', etc., no designan nada, sino que se limitan a indicar generalidad como las letras en la aritmética, sería muy útil para una más clara comprensión de la situación que empleásemos efectivamente letras para esa finalidad. Vamos a estipular lo siguiente: En vez de 'el punto *A* está en el plano α' diremos '*A* está en la relación-*p* con α'. En vez de 'el punto *A* está en la recta *a*' diremos '*A* está en

[37] H. Freudenthal, «Die Grundlagen der Geometrie und die Wende des 19. Jahrhunderts», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte,* vol. 7 (1961), págs. 16-17.

la relación-*q* con *a*'. En vez de '*A* es un punto' diremos '*A* es un Π'»[38].

Analizando las múltiples interpretaciones a que Hilbert somete sus conceptos, Frege propone comparar la teoría axiomática de Hilbert con un sistema de ecuaciones con varias incógnitas. Cada sistema de conceptos que satisface la teoría es como una solución de esas ecuaciones[39]. Con esto, Frege se acerca mucho a la posterior aclaración de la situación por Tarski en función del concepto de modelo. Pero Frege se deja llevar por su espíritu polémico, preguntándose: «¿Quién nos dice que este sistema de ecuaciones tenga alguna solución y que esta sea unívoca?»[40]. Que el sistema tiene alguna solución debiera estar claro para Frege, pues Hilbert mismo la ha presentado en el modelo aritmético que le sirve para probar su consistencia. Pero la solución no es, ni pretende ser, unívoca. Precisamente en la multiplicidad de soluciones, interpretaciones o modelos ve Hilbert —y con él toda la matemática posterior— la principal ventaja del nuevo método axiomático.

Frege es un crítico implacable del uso más bien confundente que Hilbert hace de las palabras «definir» y «definición», que tan pronto emplea en el sentido de definiciones nominales explícitas —como cuando define el triángulo— como en el sentido de determinación mediante los axiomas. Contra las definiciones explícitas Frege no tiene nada: son meras estipulaciones. Pero se niega a aceptar que los axiomas definan —implícitamente, se diría luego, aunque la expresión no es de Hilbert— los conceptos (de primer orden) de *punto, recta, plano, ...incide con..., ...es congruente con..., ...está entre... y...,* como pretendía Hilbert. En esto tenía razón Frege. Pero Hilbert veía claro que con sus axiomas algo quedaba definido, aunque no sabía expresarlo bien. El propio Frege se lo articuló mejor en su carta de 6 de enero de 1900,

[38] Gottlob Frege, «Über die Grundlagen der Geometric, II», *Jahresbericht, dar Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* vol. 15 (1906), pág. 388. Reimpreso en Gottlob Frege: *Kleine Schriften* (ed. por J. Angelelli), Hildesheim, 1967, págs. 304-305.

[39] Gottlob Frege, «Über die Grundlagen der Geometric», *Jahresbericht, dar Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* vol. 12 (1903), pág. 370. Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften,* Hildesheim, 1967, pág. 268.

[40] *Ibídem.*

cuando le escribe: «Me parece que lo que usted en realidad quiere definir son conceptos de segundo orden, pero que usted no los distingue claramente de los de primer orden» [41]. En efecto, los axiomas de Hilbert definen algo —como él decía—, pero lo que definen —y no implícita, sino explícitamente— no son los conceptos de primer orden de punto, recta, etc., sino el concepto de segundo orden de espacio euclídeo, o, como hoy diríamos, la estructura abstracta de espacio euclídeo.

Aquí, como en tantas otras cosas, Frege podía hacer aportaciones esenciales al desarrollo, aclaración y explicitación del nuevo método axiomático, con lo que se hubieran quemado etapas que luego costaría arduos esfuerzos y largo tiempo recorrer. Pero el carácter polémico y huraño de Frege, unido a una cierta altivez de Hilbert, condujeron la polémica al estéril marasmo en que acabó.

Consistencia

En el capítulo segundo de sus *Grundlagen* ofrece Hilbert una prueba de la consistencia de sus axiomas, indicando un modelo numérico, es decir, un sistema de cosas que satisfacen todos los axiomas de la teoría y donde los puntos son ciertos pares de números algebraicos; las rectas, ciertos tríos de números algebraicos; donde la incidencia de una recta con un punto quiere decir la validez de una cierta ecuación numérica, etc. Con esto queda probada la consistencia de los axiomas, no la consistencia absoluta, claro, pero sí la consistencia relativa al análisis matemático.

La falta de comprensión por Frege del nuevo método se manifiesta en sus críticas a la prueba de consistencia de Hilbert, a quien echa en cara el cambio de significado de palabras como «punto», que en el libro de Hilbert tan pronto significa punto como par de números algebraicos (que es algo muy distinto), etc. Hilbert, por el contrario, ve en esa multiplicidad de interpretaciones la principal ventaja del nuevo método axiomático.

[41] Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg, 1976, pág. 74.

Frege considera completamente inútil ofrecer una prueba de consistencia de los axiomas, pues la consistencia se sigue de la verdad y los axiomas son por definición verdaderos. Frege escribe a Hilbert: «Llamo axiomas a los enunciados verdaderos, pero indemostrados... De la verdad de los axiomas ya se sigue que estos no se contradicen entre sí. Por tanto, esto no requiere prueba alguna adicional» [42]. Como señala Dummett [43], no deja de resultar irónico que Frege dijera esto precisamente poco antes que Russell descubriese que los axiomas del propio Frege eran contradictorios. Pero Frege mantuvo hasta el final su concepción tradicional de la verdad de los axiomas y de la superfluidad de las pruebas de consistencia de los mismos.

En su carta de respuesta a la citada de Frege, Hilbert responde a la objeción fregeana de que no es necesario probar la consistencia de los axiomas, pues esta se sigue de su verdad: «Siempre que yo pienso, escribo y hablo sobre estos temas, cada vez digo precisamente lo contrario: Si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos, entonces existen las cosas definidas por los axiomas. Este es para mí el criterio de la verdad y de la existencia» [44]. La manera de expresarse de Hilbert no es correcta. Si los axiomas no son contradictorios, son consistentes, pero no verdaderos. Los axiomas abstractos en el sentido de Hilbert no son el tipo de entidad de la que pueda predicarse la verdad o falsedad. ¿Qué decir de su segunda afirmación, la de que de la consistencia de los axiomas se sigue —en terminología actual— la existencia de un modelo? Hoy sabemos que toda teoría consistente de primer orden posee un modelo. Por tanto, Hilbert tenía parte de razón. Pero no tenía toda la razón, pues su geometría axiomatizada era una teoría de segundo orden (por el axioma de continuidad) y no ocurre que toda teoría consistente de segundo orden tenga un modelo. De todos modos, si aceptamos modelos generales no estándar de segundo or-

[42] Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel,* Hamburg, 1976, pág. 63.

[43] M. Dummett, *Frege on the Consistency of Mathematical Theories,* en M. Schirn (ed.), *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik,* Frommana-Holzboog. Stuttgart, 1976, pág. 241.

[44] En Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel,* Hamburg, 1976, pág. 66.

den, entonces sí que también cada teoría consistente de segundo orden tiene un modelo, pero es dudoso que Hilbert los aceptase o pudiese pensar siquiera en ellos.

Dummett ha escrito que «cuando nos las habemos con una teoría genuina, es decir, una para la que tenemos una interpretación determinada, bajo la cual creemos que sus axiomas son verdaderos, no tiene sentido hablar de que encontramos un tal modelo (es decir, uno que sirva para probar su consistencia), pues ya tenemos un modelo» [45]. Esto parece una defensa de la postura de Frege, pero no lo es. Dummett se refiere a la aritmética, no a la geometría. Y en el caso de la geometría euclídea, que es el que nos ocupa, no poseemos tal modelo (el candidato más obvio, que sería el espacio físico, no lo es o al menos es muy discutible que lo sea). De ahí el interés en buscar un tal modelo en zonas más seguras, como pueda ser el análisis matemático (restringido a números algebraicos).

Independencia

Su concepción abstracta del método axiomático permite a Hilbert ofrecer pruebas de independencia de sus axiomas, probando que cada axioma es independiente de los demás mediante la indicación de un sistema que satisface a los demás axiomas, pero no a aquel cuya independencia se trata de probar. Con lo cual, al tiempo que prueba la independencia del axioma de las paralelas, prueba la consistencia de la geometría no euclídea (relativa a la euclídea). El proceder de Hilbert en sus pruebas de independencia es irreprochable, pero Frege no las aceptaba, pues le echaba en cara el uso de modelos en que algún axioma resultaba falso, lo cual sería absurdo, pues un axioma no puede ser falso.

En 1900 y 1903, Frege se limita a rechazar las pruebas hilbertianas de independencia. Pero luego dedica mayor atención al tema y en sus

[45] M. Dummett, *Frege on the Consistency of Mathematical Theories,* en M. Schrin (ed.): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik*, Stuttgart, 1976, pág. 242.

artículos de 1906 llega a hacer propuestas constructivas al respecto. Empieza por definir la independencia de una proposición respecto a otras como la imposibilidad de inferir la primera a partir de las últimas en un número finito de pasos[46]. (Esto, sabemos hoy, solo es aceptable si el cálculo es suficiente —o semánticamente completo—, lo cual no es el caso del de Erege ni de ninguno de segundo orden.)

Luego Frege, adelantándose a Tarski, constata que con las prebas de independencia se inicia una nueva actividad en la matemática, lo que luego se llamaría la metamatemática. «¿Cómo podemos probar la independencia de una proposición respecto de un grupo de otras proposiciones? Lo primero sobre lo que hay que llamar la atención es que con esta pregunta penetramos en un territorio que hasta ahora ha sido ajeno a la matemática. Pues aunque la actividad matemática, como la de cualquier otra ciencia, se realiza mediante proposiciones, las proposiciones mismas no son por lo demás objeto de su consideración. También la independencia de una proposición respecto a un grupo de proposiciones es distinta de las relaciones que normalmente son objeto de la investigación matemática...»[47].

A continuación, Frege propone un método para probar la independencia de proposiciones[48]. El método para probar que una proposición α es independiente de *n* proposiciones $\beta_1 \ldots \beta_n$ consiste en sustituir las constantes no lógicas que aparecen en α, $\beta_1 \ldots \beta_n$ por otras constantes distintas de la misma categoría tales que $\beta_1 \ldots \beta_n$ se transforman en proposiciones verdaderas y α en una proposición falsa. Lo cual, como ya señaló Steiner[49], es equivalente al proceder hilbertiano, aunque Frege parece no haberse dado cuenta de ello. En cualquier caso aquí abandonó sus, por lo demás, muy prometedoras reflexiones sobre el tema.

---

[46] Gottlob Frege, «Über die Grundlagen der Geometrie, III», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* vol. 15 (1906), págs. 423-424. Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften,* Hildesheim, 1967, pág. 318.

[47] *Ibíd.* Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften,* pág. 320.

[48] *Ibíd.* Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften,* pág. 321-322.

[49] H. G. Steiner, «Frege und die Grundlagen der Geometrie, II», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte,* vol. 11 (1964), pág. 42.

Deducción

En una teoría axiomática abstracta los teoremas se prueban a partir de los axiomas según reglas de inferencia establecidas y sin tener en cuenta para nada las posibles interpretaciones de los mismos. Lo único que una tal prueba nos garantiza entonces —*si las reglas* son correctas— es que cada interpretación que satisfaga los axiomas —que los convierta en ideas verdaderas— *satisfará también los teoremas* —los convertirá igualmente en ideas verdaderas—. Esta manera abstracta y formal de proceder es descrita correctamente por Frege «como si hubiera que probar una mera formulación que no exprese idea alguna, y como si luego hubiera que asignar a esa formulación ideas distintas en dominios distintos». Pero a continuación añade: «¡Absurdo! Una mera formulación sin contenido no puede ser probada»[50].

Frege no admite las pruebas abstractas por dos razones. En primer lugar, porque parten de axiomas abstractos o —como él dice— pseudoaxiomas, que no expresan proposición alguna, mientras que una inferencia solo puede partir de una proposición y llevar a otra. «De que los seudoaxiomas no expresan proposición alguna se sigue además que no pueden ser premisas de una cadena de inferencias. Con los seudoaxiomas no tenemos todavía ninguna proposición y, por lo tanto, tampoco premisa alguna»[51]. En segundo lugar, Frege no acepta la inferencia basada en las solas reglas de inferencia, capaces de aplicarse a meras formulaciones, sino que exige que la inferencia se base en actos psíquicos de juicio. «Una inferencia no pertenece al campo de los signos, sino que es un acto de enjuiciamiento [*Urteilsfällung*], que se realiza sobre la base de juicios anteriores según leyes lógicas. Cada premisa es una proposición reconocida como verdadera y en el juicio inferencial se reconoce igualmente una cierta proposición como verdadera»[52]. Como

[50] Gottlob Frege, «Über die Grundlagen der Geometrie, II», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 15 (1906), pág. 385. Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften*, Hildesheim, 1967, pág. 302.

[51] *Ibíd.* Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften*, pág. 306.

[52] *Ibíd.* Reimpreso en Gottlob Frege, *Kleine Schriften*, págs. 303-304.

ha señalado Resnik[53], de ahí se sigue que no se puede hacer una inferencia a partir de una premisa cuya verdad no se reconoce y que la inferencia lógica pierde su intersubjetividad. Si fulano acepta α como verdad, puede inferir $\alpha \vee \beta$ a partir de α. Si mengano no acepta α como verdad, no puede inferir $\alpha \vee \beta$ a partir de α. La inferencia lógica pasa así a depender de hechos psíquicos subjetivos, tales como el de que alguien acepte o no la verdad de una idea. Como el mismo Resnik ha indicado[54], con esto cae Frege en el psicologismo, que él tanto había combatido, y abandona sin darse cuenta su principio de separación tajante entre lógica y psicología. (Y además, como ha señalado P. Geach[55], en el suplemento a *Grundgesetze II* el mismo Frege se ve obligado a realizar —y realiza— inferencias a partir de premisas no aseveradas.)

Es curioso que Hilbert, empleando palabras cargadas de significado intuitivo —«punto», «recta», etc.—, pretenda emplearlas como signos vacíos de significación, *inhaltsleer*, y que, careciendo de un cálculo deductivo o de reglas de inferencia explícitamente formuladas, pretenda proceder de un modo formal y abstracto en sus deducciones, mientras que Frege, empleando signos y expresiones formalizadas, pretende escribir enunciados de significación unívoca, *inhaltlich*; y, disponiendo de un cálculo deductivo formal perfectamente desarrollado, pretenda limitarse a registrar la cadena de juicios por la que un sujeto va reconociendo la verdad de ciertas ideas.

En realidad, Frege podría haber aportado a las deducciones formales abstractas de Hilbert el soporte de un sistema explicitado de reglas de inferencia que aquellas requerían para su perfección. Pero Frege prefirió polemizar, en vez de colaborar en la empresa hilbertiana, y Hilbert no echó mano del cálculo de Frege, sino que acabó desarrollando el suyo propio treinta años más tarde, aunque reconociendo la primacía de Frege en este campo.

---

[53] M. D. Resnik, «The Frege-Hilbert Controversy», *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 34 (1973-74), págs. 386-403. Publicado en alemán en M. Schirn (ed.), *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik*, Stuttgart, 1976, pág. 210.

[54] *Ibíd.* Véase M. Schirn (ed.), *Studien zu Frege I*, págs. 211-212.

[55] P. Geach, *Second Order Quantification in Frege*. Simposio sobre Lógica y Filosofía en Frege, celebrado en Peñíscola en noviembre de 1979.

AMARGURA Y OCASO

Aunque ahora está considerado como uno de los clásicos indiscutibles del pensamiento lógico y filosófico, sobre el que se publica una cascada ininterrumpida de tesis, libros y artículos, Frege sufrió en vida una dramática falta de reconocimiento académico y social. Tuvo dificultades para publicar sus artículos, que con frecuencia eran rechazados. Incluso se vio obligado a pagar de su propio bolsillo la edición de su obra fundamental, *Grundgesetze der Arithmetik*.

Frege pasó la mayor parte de su vida como profesor de matemáticas en la Universidad de Jena, y, aunque en 1896 —por intervención de Abbe— fue nombrado profesor honorario (*ordentlicher Honorarprofessor*), nunca llegó a obtener una cátedra (*ordentlicher Lehrstuhl*). Ni siquiera se le concedió una distinción rutinaria que solía otorgarse a todos los profesores al cumplir los sesenta años, pues «su actividad académica es de tipo subalterno y carece de especial interés para la universidad», según las palabras del secretario (*Kurator*) de la misma[56].

Tras la muerte prematura de su mujer, Magarete, en 1904, Frege —que no tuvo hijos— adoptó al hijo de su asistenta doméstica, Alfred Frege.

A los artículos sobre la geometría siguió un largo silencio de doce años, en los que un Frege huraño y decepcionado se fue hundiendo en la soledad y la melancolía, retroalimentada por su propia actitud y por su reticencia a participar en reuniones. Así, cuando en julio de 1899 Couturat invitó oficialmante a Frege a participar en el Congreso Internacional de Filosofía que se iba a celebrar en París el año siguiente, y a presentar en él su ideografía o su teoría de los números naturales, Frege no aceptó la invitación. En 1912, Russell lo invitó a participar en un congreso matemático en Cambridge, pero en junio de ese mismo año le respondió Frege, rechazando la invitación: «Estimo mucho el honor que usted me hace con su invitación a participar como conferenciante en el congreso de matemáticos, pero no puedo decidirme a aceptarla.

[56] Günther Patzig, *Sprache und Logik*, Gotinga, 1970, pág. 77.

Me doy cuenta de que tengo motivos importantes para ir a Cambridge, y sin embargo siento algo así como un obstáculo insuperable. Por eso se me hace tan difícil contestar a su amable carta. ¡Por favor, no se enoje conmigo!»[57].

Frege tenía pocos alumnos. Uno de ellos, Carnap[58], nos cuenta que en 1913 solo otras dos personas (una de ella un comandante retirado, que estudiaba las nuevas ideas matemáticas como *hobby*) asistían con él a las clases de Frege. De todos modos continuó su actividad docente hasta 1917.

Frege solo rompió su largo silencio para publicar, bajo el título genérico de *Logische Untersuchungen* (Investigaciones lógicas), tres artículos[59] que resumen los elementos de su teoría lógica y semántica: «Der Gedanke» (El pensamiento, 1918), «Die Verneinung» (La negación, 1918) y «Gedankengefüge» (Sistemas de pensamientos, 1923). Estos artículos añaden alguna novedad, como el carácter simple, no analizable, de la noción de verdad, aunque este añadido resulta (mirado desde hoy) problemático, en vista de la definición de la verdad en los lenguajes formales por Tarski en 1935. El tercer artículo, dedicado a la lógica conectiva, elige como conectores primitivos la negación y la conjunción, y define en función suya el condicional (frente al proceder inverso en *Begriffsschrift*). Frege dejó sin acabar un cuarto artículo, «Logische Allgemeinheit» (Generalidad lógica), dedicado a los cuantificadores. En conjunto, los cuatro artículos estaban destinados a presentar una introducción filosófica a la lógica, que nunca llegó a completarse.

La Primera Guerra Mundial y las durísimas reparaciones impuestas a Alemania por los franceses en el tratado de Versalles habían conducido a Alemania a la ruina y la miseria. Frege estaba sumido en la amar-

[57] Gottlob Frege, *Wissenschftlicher Briefwechsel.* Felix Meiner Verlag. Hamburg, 1976, pág. 252.

[58] Rudolf Carnap, «Intellectual Autobiography», pág. 5; en *The Philosophy of Rudolf Carnap*, La Salle, Ill., 1963.

[59] Gottlob Frege, Der Gedanke, Die Verneinung, Gedankengefüge. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus* (1918), págs. 58-77, 143-157, y (1923) págs. 143-157. (Esta revista tenía un carácter marcadamente nacionalista. La austeridad de los artículos de Frege contrasta con la retórica rimbombante de la mayor parte de los trabajos que en ella se publicaban.)

gura personal y la desolación por la situación de su país. De su estado de ánimo en esa época da testimonio el diario privado que escribió entre abril y mayo de 1924, que además es el único documento que nos permite conocer sus ideas políticas, sorprendentemente nacionalistas y estrechas. Solo de su viejo maestro Ernst Abbe se acordaba con admiración y agradecimiento: «El profesor Abbe de Jena es uno de los hombres más nobles que yo haya conocido en toda mi vida» (10-3-24). Su héroe político era Bismarck, y atribuía los problemas de su época a la ausencia de personajes de su talla. Pensaba que los conflictos sociales que asolaban a Alemania eran efecto de la soberbia de los patronos y de la envidia de los obreros, que conducían a la nefasta lucha de clases, atizada por socialistas y teólogos de izquierdas. Su chauvinismo lo llevaba a rechazar las sociedades anónimas, ante el «peligro» de que sus acciones acabasen en manos de extranjeros: «Las desventajas de las sociedades anónimas son: no ofrecen garantía ninguna de que las acciones permanezcan en manos de alemanes; permiten que extranjeros adquieran derechos en Alemania ...» (19-4-24). Era revanchista frente a los franceses: «¡jóvenes alemanes, no celebréis fiesta alguna! Esperad hasta que hayáis restaurado el prestigio de Alemania entre los pueblos mediante una victoria sobre los franceses» (16-4-24). Compartía un antisemitismo primitivo: «Se puede reconocer que hay judíos muy honorables, y sin embargo considerar como una desgracia que haya tantos judíos en Alemania, y que estos tengan los mismos derechos políticos que los alemanes de origen ario. De todos modos, no basta el deseo de que los judíos pierdan sus derechos políticos en Alemania o, mejor aún, que desaparezcan de Alemania. Si se quisiera promulgar parágrafos que solucionasen esta lamentable situación, habría que empezar por plantearse la pregunta: ¿Cómo distinguir con seguridad a los judíos de los no judíos?» (30-4-24). Y defendía un patriotismo emocional, en el cual «solo participa el ánimo [*das Gemüt*], no el entendimiento [*der Verstand*]» (2-5-24), lo cual no deja de ser decepcionante en el fundador de la lógica moderna.

Frege siempre pensó que su tierra era Mecklenburg, donde había nacido, y donde procuraba pasar sus vacaciones, incluso varios años al precio de recorrer a pie los 400 km que separan Jena de Wismar. Por

ello, en cuanto se jubiló, en 1918, se trasladó provisionalmente a Bad Kleinen (en Mecklenburg, cerca de su Wismar natal), a la espera de terminar de arreglar una casa que había comprado como hogar definitivo en Neu-Pastow (cerca de Rostock). Cuando ya estaba a punto de mudarse a su nueva casa, la muerte lo sorprendió en Bad Kleinen, el 26 de julio de 1925.

Este hombre de vida amarga, solitaria y poco feliz nos dejó una de las obras más originales, creativas y vigorosas de toda la historia del pensamiento, en la que todavía se aprecia su frescura, su honestidad intelectual y su rigor diamantino.

2
GEORG CANTOR (1845-1918)

INFANCIA Y JUVENTUD

Georg Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo. Por esa época, San Petersburgo era una ciudad cosmopolita, en la que vivían más de 40.000 alemanes y otros muchos extranjeros. Los mismos zares casi siempre se casaban con princesas alemanas. De hecho, el alemán y el francés se oían casi tanto como el ruso en la corte y entre las clases acomodadas, los artesanos y los comerciantes. La ciudad ofrecía todo tipo de atractivos culturales. Ya antes había atraído a matemáticos de primera fila, como Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler (1707-1783).

La madre de Cantor, Marie Böhm, una mujer alegre y musical, hija de un director de orquesta en la Ópera de San Petersburgo, descendía de una familia de músicos centroeuropeos.

El padre de Cantor, Georg Woldemar Cantor, había nacido en Copenhague y había marchado luego con su familia a San Petersburgo, donde recibió su educación en la misión luterana, que le transmitió una profunda religiosidad. En esa ciudad se estableció como comerciante, poniendo en marcha un floreciente negocio de importación de lonas y cordelería. Cuando este negocio falló, inició esforzadamente una nueva carrera como corredor de Bolsa. Era un hombre serio, religioso y trabajador. Siempre se preocupó mucho de la formación de su

hijo Georg, al que escribía largas y detalladas cartas, llenas de prédicas, estímulos y consejos, que este guardaba con reverencia filial. El día de la confirmación de su hijo, le escribió una carta que contenía todo un programa de vida, además de una exhortación a la religiosidad, a la ambición, a la perseverancia, a la formación profesional sólida y a la preparación psicológica interna para superar las dificultades y oponerse a los enemigos que siempre acechan. La carta empieza: «Queridísimo Georg: Por la bondad del todopoderoso, el creador del universo y el padre de todas las criaturas vivientes, espero que este día tenga una influencia llena de bendiciones sobre toda tu vida futura. Espero que siempre recuerdes los propósitos virtuosos que sin duda habrás formulado hoy en el silencio de una solemne resolución». Luego siguen las advertencias: «Con frecuencia los individuos más prometedores fracasan tras oponer una débil resistencia a las dificultades que siguen a su entrada en los asuntos prácticos. Una vez roto su coraje, se atrofian completamente e incluso en el mejor de los casos no llegarán a nada más que a ser genios arruinados». La religiosidad debe vacunar el espíritu contra tales fracasos: «[A esos fracasados] les faltaba el interior firme, del que todo lo demás depende. Créeme, mi querido hijo: tu más sincero, auténtico y experimentado amigo, ese corazón firme que debe vivir en tu interior, es un estado de ánimo de verdadera religiosidad. Se nos revela a través de un sentimiento sincero y humilde de reverencia agradecida hacia Dios, del cual surge la fe en Dios victoriosa, inquebrantable, constante, que nos mantiene durante toda nuestra vida en comunión silenciosa e indudable con nuestro Padre celestial». A esto hay que añadir la seria formación profesional: «Para prevenir todos los problemas y dificultades que inevitablemente se alzan contra nosotros por la envidia y la maledicencia de los enemigos abiertos o secretos en nuestra aspiración al éxito en la actividad de nuestra especialidad o negocio, para combatirlos con éxito necesitas ante todo adquirir la mayor cantidad posible de conocimientos y habilidades técnicas». Al final, la carta concluye conjurando la atención con que toda la familia está pendiente del destino y éxito del joven Georg: «Acabaré con estas palabras: Tu padre, y en realidad tus padres y todos los demás miembros de la familia, tanto en Alemania

como en Rusia y Dinamarca, tienen sus ojos puestos en *ti* como el hijo mayor, y esperan que llegues a ser ... una estrella luminosa en el horizonte de la ciencia. Que Dios te dé fortaleza, salud, un carácter cabal y sus mejores bendiciones. Y que tú sigas siempre por sus sendas. ¡Amén!».

En 1856 su padre se retiró de los negocios por una tuberculosis pulmonar y la familia se trasladó de San Petersburgo a Alemania, fijando su residencia en Frankfurt del Main. Cantor fue enviado al colegio de enseñanza media de Wiesbaden.

A pesar de la especial afición a las matemáticas mostrada por Cantor desde su infancia, su padre consideró más prudente (para ganarse la vida) que recibiese una formación de ingeniero. Entre 1859 y 1862 cursó los correspondientes estudios en la escuela de formación profesional (*Gewerbeschule*) de Darmstadt. En 1962 abandonó Cantor la vida amable y relativamente provinciana del valle del Rin. Ni en Frankfurt ni en Wiesbaden ni en Darmstadt había universidades. Cantor era obediente y no quería contrariar a su padre, pero deseaba ardientemente estudiar matemáticas, por lo que tenía un conflicto interno. Su padre, que seguía con mucha atención los progresos de la formación de su hijo, al que enviaba frecuentes cartas, se daba cuenta de la fuerte vocación del muchacho. Finalmente, accedió a sus deseos y lo autorizó a estudiar matemáticas. Cantor, que entonces contaba diecisiete años, escribió a su padre: «Querido papá: Ya puedes imaginarte cuánto me he alegrado al recibir tu carta. ... Hasta entonces, la inclinación y el deber se agitaban en permanente conflicto. Ahora soy feliz, pues sé que no te disgustará que elija mi carrera de acuerdo con mis sentimientos. Espero, querido padre, producirte satisfacciones en el futuro, pues mi alma y mi yo entero viven en mi vocación. Cuando el ser humano quiere y puede hacer algo, y una voz desconocida y misteriosa lo conduce hacia ello, lo acabará logrando»[1].

En otoño de 1862, Cantor empezó a estudiar en la Universidad de Zürich. Al año siguiente murió su padre, y Cantor interrumpió sus estudios para acompañar a su madre, que se había trasladado a Berlín.

[1] Carta del 25-5-1862, párrafo reproducido en Cantor, 1966, pág. 453.

Berlín ya era entonces una gran ciudad, de más de 600.000 habitantes, en plena expansión, llena de actividad y vitalidad. Cantor decidió continuar allí sus estudios.

En la Universidad de Berlín se encontraban algunos de los mejores matemáticos de la época, como Karl Weierstrass, Ernst Kummer y Leopold Kronecker, a cuyas clases acudían estudiantes de todo el mundo, que aprendían de primera mano los resultados más recientes de la investigación. Así, Weierstrass exponía sus propios descubrimientos sobre funciones analíticas y elípticas y sobre cálculo de variaciones, Kronecker sobre ecuaciones algebraicas y teoría de números, y Kummer también sobre teoría de números. Cantor asistió a las clases de todos ellos, así como a las del físico Dove y del filósofo Adolf Trendelenburg (1802-1872), que había representado una reacción contra el confuso romanticismo de Hegel y había abogado (junto a Franz Brentano) por una «vuelta a Aristóteles». Un semestre estudió en Göttingen, donde oyó al filósofo Hermann Lotze (1817-1881), conocido por su teoría idealista de los valores. En sus años en Berlín, Cantor trabó amistad con algunos compañeros de estudios, y en especial con Hermann Schwarz (1843-1921). En 1867 presentó Cantor en Berlín su tesis doctoral (escrita en latín, como era obligatorio todavía entonces en la universidad alemana), titulada *De aequationibus secundi gradus indeterminatis* (Sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado), en que mejoraba un resultado de Gauss sobre ciertas ecuaciones diofánticas. En ella formula como *motto: In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi* (En las matemáticas, el arte de plantear las preguntas es más importante que el de hallar las respuestas). La tesis de Cantor fue juzgada por Kummer y Weierstrass, y recibió el *magna cum laude*.

Al año siguiente, Cantor se examinó de la prueba para ser profesor de enseñanza media e inició las prácticas en un instituto de Berlín, pero las dejó ante la posibilidad de hacer una habilitación en Halle, que le abría el camino a una carrera en la universidad. Él quería dedicarse a la investigación matemática, no a la enseñanza de lo ya sabido. Como escribía a su hermana Sophie: «Cada vez me doy más cuenta de cómo la matemática se me ha metido en el corazón o, más bien, de que

yo he sido creado para encontrar en el pensamiento y el trabajo en esa esfera la felicidad, la satisfacción y el placer verdadero... Como puedes comprender, estas esperanzas están ahora ligadas a Halle, donde tendré una actividad completamente relacionada con mi oficio...».

La Universidad de Halle era por esa época una universidad provinciana de Prusia sin especial importancia, en la que sin embargo era catedrático el notable matemático Eduard Heine (que dio nombre al teorema de Borel-Heine). Schwarz, el amigo de Cantor de los años berlineses, también estaba allí, contratado como profesor no numerario desde 1867, aunque se trasladó a ocupar una cátedra en Zürich dos años después, en 1869, coincidiendo con la llegada de Cantor, a quien él había recomendado.

Cantor llegó a Halle en la primavera de 1869 e inmediatamente se habilitó con un trabajo (en latín) sobre teoría de números (*De transformatione formarum ternarium quadraticarum*), que resolvía el problema de determinar todas las transformaciones de una forma cuadrática ternaria en sí misma. Cantor había leído con mucho interés a Spinoza como estudiante y como joven docente, como muestra la cita que de él hace en el *motto* de su escrito de habilitación y el cuaderno de comentarios (en latín) a su ética, que se conserva.

En ese mismo año 1869 publicó su trabajo «Über einfache Zahlensysteme» (Sobre sistemas simples de números), que testimonia su continuo interés por la teoría de números, despertado por Kummer y Kronecker. En Halle, Cantor enseguida se entendió muy bien con el catedrático Heine, que investigaba las series trigonométricas, en especial su convergencia uniforme y la unicidad de su desarrollo de Fourier. Heine apreciaba el talento de Cantor y lo animó a trabajar sobre la unicidad del desarrollo de Fourier. Este tipo de investigaciones fueron las que habían conducido a Lejeune Dirichlet a introducir el moderno concepto de función como correspondencia cualquiera, a Bolzano y Cauchy a definir exactamente la noción de continuidad, y a Bernhard Riemann a caracterizar precisamente la noción de integral definida (o integral de Riemann). En 1870 publicó Cantor su artículo «Prueba de que una función $f(x)$, dada para cada valor real de x mediante una serie trigonométrica, solo se deja representar de esa manera

de una única forma», en el cual incluye aportaciones de su amigo Schwarz, con quien mantenía un animado epistolario científico. Un año después publicó un complemento a ese artículo, señalando que el resultado de unicidad sigue siendo válido aunque se admita un conjunto finito de excepciones a la convergencia de la serie. Esto lo llevó a preguntarse por lo que pasaría con un conjunto infinito de excepciones, lo cual lo conduciría a reflexiones de enorme originalidad, que marcan el inicio de su etapa más creativa.

Carrera académica

Desde 1869, Cantor era *Privatdozent* (es decir, docente sin sueldo) en Halle. A principios de 1871 había dos docentes sin sueldo de matemáticas en la Universidad de Halle, Cantor y Thomae. La Facultad solicitó que se desdoblara la plaza vacante de profesor asociado (*Extraordinariat*), para que ambos pudiesen acceder a esa posición. Thomae recibió su plaza con su sueldo, pero la de Cantor fue creada por el Ministerio prusiano sin sueldo. En julio de 1873, Cantor, enfadado por no cobrar nada durante años, presentó su renuncia a la plaza. Finalmente se le asignó un salario (aunque inferior al de Thomae), y retiró su renuncia. Una vez que contaba con un sueldo, se comprometió con Vally Guttmann, una amiga de su hermana Sophie, muy musical como ella y alumna brillante del conservatorio. Se casó con Vally poco después, en verano de 1874.

A Cantor, Halle le venía pequeño. En 1875 escribió a la Facultad de Berlín, solicitando que se le considerase para ocupar una plaza vacante de profesor extraordinario de matemáticas. Y, en efecto, la correspondiente comisión universitaria de Berlín (formada por Helmholtz, Kirchhoff, Kummer y Weierstrass) propuso a Cantor en primer lugar, pero el Ministerio prusiano, quizá molesto porque Cantor ya lo había comunicado en Halle antes de que el veredicto fuera oficial, finalmente no lo nombró. En la Universidad de Halle había preocupación por la promoción de Cantor. En 1877 el catedrático Rosenberg adelantó su jubilación, a fin de que Cantor pudiera obtener su cátedra,

pero el Ministerio todavía tardó dos años más en nombrar catedrático a Cantor, cosa que finalmente hizo en 1879. Por primera vez Cantor, que ya tenía treinta y cuatro años y era un gran matemático, tenía una posición segura en la universidad. En 1882 ya era una autoridad. Cuando Lindenmann descubrió la trascendencia de π y envió el artículo correspondiente a la prestigiosa revista *Mathematische Annalen*, su editor, Felix Klein, encargó a Cantor el informe sobre su publicación, cosa que él hizo con gran diligencia. En 1883 escribió directamente al ministro, pidiéndole el traslado a Berlín, sin resultado. En 1885 quedó vacante una cátedra de matemáticas en la Universidad de Göttingen, uno de los grandes centros matemáticos del mundo, como París y Berlín. Aunque Cantor era uno de los candidatos, finalmente la plaza fue para Felix Klein.

Cantor, resignado ya a quedarse en Halle el resto de su vida, compró en 1886 una sólida y lujosa casa de estilo neoclásico, bien construida, con dos plantas principales, además de la planta baja y la de buhardillas, que difícilmente podría haber pagado con su escuálido salario de profesor (inferior incluso al habitual en su categoría). Probablemente efectuó la compra empleando la sustanciosa herencia recibida de su padre. Cantor trabajaba en una gran sala del primer piso, que servía de estudio y biblioteca. Sus paredes estaban cubiertas de arriba abajo de estanterías repletas de libros. Era un trabajador infatigable (cada día empezaba a trabajar a las cinco de la mañana y no dormía más de seis horas), así como un gran coleccionista de libros y un lector empedernido.

En la casa de Cantor había frecuentes reuniones sociales, en las que su mujer, Vally, interpretaba música y entretenía a los invitados, entre los que se encontraban diversos profesores, e incluso los filósofos Vaihinger y Husserl. Otras veces acudía a las tertulias de los jóvenes asistentes, o los invitaba a su casa. Cantor se ocupaba de la educación de sus hijos, y en especial de la carrera musical de su hija Else y de su hijo Rudolf, un joven virtuoso de la música desgraciadamente muerto de un ataque al corazón a los doce años.

El periodo 1872-1884 fue la época de máxima creatividad en la vida de Cantor, iniciado con su teoría de los números reales.

Los años 1878-1884 marcaron el cenit de su creatividad matemática. Son los años en que desarrolló la teoría de conjuntos y fue publicando su *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Sobre conjuntos lineales infinitos de puntos) en seis entregas sucesivas, que aparecieron entre 1879 y 1884 en *Mathematische Annalen*, gracias a la perspicacia de su editor, Felix Klein. Aquí aparecen ya casi todas las nociones de la teoría de conjuntos, incluidos los números cardinales y ordinales y su interrelación en la teoría de los alefs. La culminación de su teoría requería resolver problemas (del buen orden y del continuo) imposibles de solucionar con los medios disponibles. Quizás exhausto por el esfuerzo, o quizá por otros motivos endógenos, en 1884 Cantor cayó enfermo y su periodo más creativo se acabó.

En sus cuarenta y cuatro años (1869-1913) de actividad docente, Cantor dio clases de casi todas las disciplinas matemáticas (teoría de números, ecuaciones abelianas, formas cuadráticas, geometría diferencial, teoría de la probabilidad, funciones elípticas, mecánica analítica, hidrodinámica), pero —curiosamente— nunca de teoría de conjuntos, que era el tema absorbente de su propio trabajo investigador. Su único discípulo directo en este campo fue Felix Bernstein. En Munich, el joven matemático Ludwig Scheeffer se interesó por la teoría de conjuntos, pero murió prematuramente. Cantor tuvo contacto social con el joven *Privatdozent* de Leipzig Felix Hausdorff, que más tarde trabajaría creativamente en teoría de conjuntos y escribiría el famoso tratado *Grundzüge der Mengenlehre*, «dedicado al creador de la teoría de conjuntos, Georg Cantor, con agradecida admiración».

Cantor y Dedekind

En un viaje a Suiza en 1872, Cantor conoció por casualidad a Dedekind, e inmediatamente se estableció entre ellos una relación de mutuo respeto y admiración. A partir de ese momento, su rico epistolario revela a Dedekind como el interlocutor favorito de Cantor en el desarrollo de la teoría de conjuntos. Los intereses de Dedekind coincidían en gran parte con los de Cantor, y ambos seguían con gran atención el

desarrollo de las ideas del otro. Sin embargo, sus enfoques y métodos eran distintos. Cantor era mucho más impetuoso, temperamental, intuitivo y constructivo; Dedekind era más calmado, riguroso y analítico. Cantor a veces se precipitaba en sus pruebas, y se fiaba mucho del criterio sosegado de Dedekind. Como Cantor le escribe en una carta de 1877, mientras Dedekind no dé el visto bueno a sus resultados, «solo puedo decir: lo veo, pero no lo creo».

En 1881 había muerto Eduard Heine, el otro catedrático de matemáticas de la Universidad de Halle. La comisión encargada de proveer la plaza aceptó la propuesta de Cantor y recomendó a Dedekind para cubrirla. Cantor mismo fue encargado de redactar el escrito, dirigido al Ministerio, que contenía encendidos elogios de Dedekind. Siguiendo este consejo, el Ministerio le ofreció la cátedra, pero Dedekind la rechazó, a pesar de los esfuerzos de Cantor para que la aceptase. Finalmente el Ministerio en 1882 acabó nombrando catedrático de Halle a un candidato de Kronecker, sin preguntar a Cantor, que se llevó un berrinche. Su amistad hacia Dedekind se enfrió a partir de ese momento[2], y solo diecisiete años más tarde, en 1899, reanudaron su fecundo epistolario científico, a iniciativa de Cantor.

Los números naturales (0, 1, 2, 3, ...) suelen compararse con los escalones de una escalera, separados unos de otros o, como también se dice, sin solución de continuidad entre ellos. Se utilizan para expresar magnitudes discretas (2 naranjas, 3 naranjas, ...). Los números reales, por el contrario, se comparan con los puntos de una línea continua. La línea recta es considerada como el continuo por excelencia, y el conjunto de sus puntos (el continuo) se identifica a veces con el conjunto de los números reales. Usamos números reales como valores de las funciones geométricas (longitud de la circunferencia, superficie del círculo, volumen de la esfera, ...), trigonométricas (seno, coseno, ...) y físicas

[2] Es muy posible que ya en 1874 se produjera un primer enfriamiento de sus relaciones, debido a que Cantor silenció en su artículo de ese año la decisiva contribución de Dedekind a la prueba de la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos. Al menos esta es la tesis que defiende José Ferreirós, basada en buena evidencia circunstancial, aunque la pérdida de las cartas de Dedekind hace difícil alcanzar certeza definitiva alguna en esta cuestión.

(masa, tiempo, temperatura, entropía, ...), como escalares de los vectores, como medida de las probabilidades, como resultados de las derivadas e integrales, etc. Los números reales impregnan completamente la matemática y la ciencia teórica toda. Pero ¿qué son los números reales? Esta pregunta no recibió respuesta hasta el año 1872, en que recibió no una, sino tres respuestas (equivalentes, pero distintas) por parte de Weierstrass, Cantor y Dedekind.

Resultado de las nuevas reflexiones de Cantor sobre el infinito motivadas por su previa investigación de las series trigonométricas fue su importante artículo «Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen» (Sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas), publicado en *Mathematische Annalen* en 1872, en el que aparece por primera vez su teoría de los números reales como clases de sucesiones convergentes de números racionales. Cantor ya había aludido a su teoría en sus clases de 1870, pero aquí aparecía por primera vez por escrito. En el mismo año 1872 publicaba también Dedekind su teoría alternativa (aunque equivalente) de los números reales como cortaduras ('de Dedekind') en su *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Y Kossak ponía por escrito las ideas de Weierstrass sobre el mismo tema, ya previamente expuestas en clase. Por la misma época el francés Charles Méray había adelantado ideas parecidas. Obviamente, el tiempo estaba maduro para la definición de los números reales. Las versiones de Cantor y Dedekind se convertirían en las clásicas.

LOS NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

Ya vimos en la introducción cómo, a partir de los números naturales, pueden construirse los números enteros y racionales. Ahora bien, las raíces de ecuaciones con coeficientes racionales y exponentes enteros con frecuencia nos llevan más allá de los números racionales. Por ejemplo, la solución $x=\sqrt{2}$ de la ecuación $x^2-2=0$ no se puede representar como el cociente de dos números enteros, no es un número ra-

cional. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado de longitud 1 es $\sqrt{2}$, lo cual implica que la diagonal es inconmensurable con el lado, según descubrieron los antiguos pitagóricos con gran consternación. Tales números (que son raíces de ecuaciones con coeficientes racionales) se llaman números algebraicos. La longitud de la circunferencia de diámetro de longitud 1 es π, pero π no es la raíz de ninguna ecuación, no es un número algebraico, sino trascendente. El número de Euler $e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$, base de los logaritmos naturales, es también un número trascendente. Todos estos números que no se pueden representar mediante fracciones de enteros son irracionales. La mayoría de los irracionales son trascendentes, pero muchos son algebraicos. Los números reales se identifican intuitivamente con los puntos de la recta y abarcan tanto a los racionales como a los irracionales. Hasta 1872 nadie había logrado definir los números reales a partir de los racionales, pero ese año presentaron sus construcciones Weierstrass, Cantor y Dedekind. La construcción de Cantor es la más flexible, pues puede llevarse a cabo no solo en $\mathbb{Q}$, sino en cualquier espacio métrico. Aquí seguiremos a Cantor.

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Una sucesión de números racionales es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, la sucesión 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... es la aplicación $s(n)=1/n$. Una sucesión s: $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ es convergente si a la larga sus valores se estabilizan o convergen, es decir, si la diferencia $|s(n)-s(m)|$ casi desaparece a partir de cierto punto, es decir, si para cada número racional positivo ε, por pequeño que sea, hay un número natural k tal que para cualesquiera números naturales n, $m>k$: $|s(n)-s(m)|<\varepsilon$. Sea SC el conjunto de las sucesiones convergentes de números racionales. Entre tales secuencias definimos una relación de equivalencia $\sim$ en que están dos sucesiones r y s si y solo si la diferencia entre sus valores casi desaparece a partir de cierto punto, es decir, si para cada número racional positivo ε, por pequeño que sea, hay un número natural k tal que para cualesquier número natural $n>k$: $|r(n)-s(n)|<\varepsilon$.

El conjunto de los **números reales** es el espacio cociente del conjunto de las sucesiones convergentes de números racionales por la recién descrita relación de equivalencia de diferencia evanescente, $\mathbb{R}=SC/\sim$.

Por tanto, cada número real es una clase de equivalencia de sucesiones convergentes de números racionales. La adición $+_{\mathbb{R}}$ y multiplicación $\cdot_{\mathbb{R}}$ de números reales se puede definir así. Sean $[r]$ y $[s]$ dos números reales (es decir, dos clases de equivalencia de sucesiones convergentes de números racionales). Entonces $[r]+_{\mathbb{R}}[s]=[r+s]$, donde la sucesión $(r+s)(n)=r(n)+_{\mathbb{Q}}s(n)$ para cada número natural n; y $[r]\cdot_{\mathbb{R}}[s]=[r\cdot s]$, donde la sucesión $(r\cdot s)(n)=r(n)\cdot_{\mathbb{Q}}s(n)$ para cada número natural n. El cero real y el uno real son, respectivamente, las clases de equivalencia de las sucesiones constantes $c(n)=0$ y $u(n)=1$ para todo número natural n, donde 0 y 1 son el cero y el uno racionales. El conjunto $\mathbb{R}$, junto con esa adición, multiplicación, cero y uno, constituye un cuerpo. También podemos definir una relación binaria de orden $<_{\mathbb{R}}$ sobre los números reales del siguiente modo: $[r]<[s]$ si y solo si hay un número racional positivo ε y un número natural k tal que para cualquier número natural $n>k$: $|s(n)-r(n)|>\varepsilon$. Se trata de una relación de orden lineal preservada bajo la adición y multiplicación del cuerpo. Por tanto, se trata de un cuerpo ordenado (como en el caso de los racionales). Además, cada subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado por arriba (es decir, tal que todos sus elementos son menores que un número real determinado, al que se llama cota superior) tiene un supremo (es decir, una mínima cota superior). Por tanto (y a diferencia de los racionales) se trata de un cuerpo ordenado y completo.

Cualesquiera dos cuerpos ordenados completos son isomorfos entre sí. Un sistema $(R, +, \cdot, 0, 1, <)$ que sea un cuerpo ordenado completo es un sistema de números reales. Los sistemas definidos y propuestos por Weierstrass, Cantor y Dedekind pueden considerarse con igual derecho como «el» sistema de los números reales, pues todos ellos son cuerpos ordenados completos y por tanto son matemáticamente equivalentes. Hasta 1872 podía uno aceptar los números racionales como claros y rechazar los reales como oscuros. Pero desde entonces, si uno acepta los números racionales y el lenguaje conjuntista, no tiene más remedio que aceptar también los números reales, pues, como acabamos de ver, a partir del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, podemos construir o definir el sistema $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$, al que pode-

mos considerar como «el» sistema de los números enteros, en el sentido de que cualquier otro candidato será isomorfo a él.

A partir de los números reales se pueden definir fácilmente los números complejos, entre los que las raíces de todas las ecuaciones tienen ya cabida.

Conforme se han ido ampliando los sistemas de números, cada vez más ecuaciones han encontrado soluciones. Pero incluso los números reales carecen de soluciones para ecuaciones como $x^2+2=0$, o como $x^2+1=0$. En efecto, $\sqrt{-2}$ o $\sqrt{-1}$ no son números reales, sino imaginarios. Pero sí son números complejos. El sistema de los números complejos permite solucionar absolutamente todas las ecuaciones.

Ya habíamos construido el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. El conjunto $\mathbb{C}$ de los **números complejos** puede definirse simplemente como el producto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, es decir, $\mathbf{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Por tanto, los números complejos pueden concebirse como pares ordenados de números reales. Por ejemplo, $\sqrt{-1}=(0, 1)$.

En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos podemos definir una adición $+_{\mathbb{C}}$ de números complejos y una multiplicación $\cdot_{\mathbb{C}}$ de números complejos del siguiente modo. Sean (a, b) y (c, d) dos números complejos cualesquiera, donde a, b, c, d son números reales. $(a, b)+_{\mathbb{C}}(c, d)=(a+_{\mathbb{R}}c, b+_{\mathbb{R}}d)$. Esta adición de números complejos es asociativa y conmutativa, tiene un elemento neutral o cero $0_{\mathbb{C}}=(0, 0)$ y respecto a ella cada elemento posee un inverso. Por tanto, el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, junto con la adición $+_{\mathbb{C}}$, constituye un grupo abeliano. $(a, b)\cdot_{\mathbb{C}}(c, d)g=(a\cdot_{\mathbb{R}}c-b\cdot_{\mathbb{R}}d,\ a\cdot_{\mathbb{R}}d+b\cdot_{\mathbb{R}}c)$. Esta multiplicación de números complejos es asociativa y conmutativa, es distributiva respecto a la adición, tiene un elemento neutral o uno $1_{\mathbb{C}}=(1, 0)$ y respecto a ella cada elemento, excepto $(0, 0)$, posee un inverso. Por tanto, $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}})$ es un cuerpo. Sin embargo, y a diferencia del cuerpo de los números reales, el de los complejos no es ordenado, pues ni siquiera está definida en él una relación de orden lineal $<$ (compatible con la suma y el producto).

$\mathbb{R}\times\{0\}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ que es isomorfo a $\mathbb{R}$. En efecto, la función f: $\mathbb{R}\times\{0\}\to\mathbb{R}$ tal que $f(r, o)=r$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}\times\{0\}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ en $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$. Por tanto, podemos identificar los números rea-

les con sus representantes bajo este isomorfismo: el real 0 con el complejo (0, 0), el real 5 con el complejo (5, 0), el real π con el complejo (π, 0), el real x con el complejo (x, 0). Los números complejos cuyo segundo componente es 0 son los reales (bajo el isomorfismo indicado). Los demás son imaginarios. Aquellos cuyo primer componente es 0 son los imaginarios puros.

Si identificamos a los números reales con los puntos de la recta, podemos identificar a los complejos con los puntos del plano. En efecto, cada par de números reales puede considerarse como la representación de un punto del plano en un sistema cartesiano de coordenadas, donde el eje de las x es el eje real y el de las y es el eje imaginario. Cada par de números reales (cada número complejo) puede también considerarse como la representación de un vector con origen en el cruce de las coordenadas. Ese vector es igual a la suma vectorial de sus proyecciones en el eje real y el imaginario. Por tanto, un número complejo $(a, b) = a + bi$, donde a, b son números reales, e i es la unidad imaginaria, $i = \sqrt{-1}$.

Si $\alpha = (a, b) = a + bi$ es un número complejo, entonces el conjugado de α es otro número complejo, simbolizado como $\alpha^* \cdot \alpha^* = (a, -b) = a - bi$.

FINITO E INFINITO

Cantor abrió el campo de lo transfinito (de los conjuntos infinitos) a la investigación matemática. Pero ¿cuál es la diferencia entre lo finito y lo infinito, qué conjuntos son finitos y cuáles infinitos? Cantor no llegó nunca a dar una definición satisfactoria. Como había definido los números naturales como los ordinales finitos, no podía luego, so pena de circularidad, definir los conjuntos finitos en función de los números naturales. De hecho define los números finitos como aquellos cuyo tipo de orden (ya veremos más adelante lo que es eso) es igual a su inverso, pero esa definición solo vale para conjuntos bien ordenados (es decir, órdenes lineales cada una de cuyas partes no vacías tiene un primer elemento). No vale, por ejemplo, para los

conjuntos de los números enteros ($\mathbb{Z}$) o racionales ($\mathbb{Q}$) con su orden habitual, que son infinitos, aunque su tipo de orden sea igual a su inverso.

Ya Galileo Galilei (1564-1642) se había fijado en el sorprendente hecho de que un conjunto infinito puede ser biyectable con una parte propia suya, en concreto, que el conjunto de los números naturales (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...) es biyectable con el de los números cuadrados (0, 1, 4, 9, 16, 25, ...). En su *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze* (1638), Galileo señala que hay muchos números naturales que no son el resultado de multiplicar un número natural (la raíz) por sí mismo, es decir, que no son cuadrados. «Por tanto, si yo digo que todos los números, incluyendo cuadrados y no cuadrados, son más que los cuadrados solos, diré la verdad.» Por otro lado, «no hay cuadrado que tenga más de una raíz, ni raíz con más de un cuadrado», y «no se puede negar que hay tantas raíces como números, ya que no hay número que no sea raíz de algún cuadrado. Estando así las cosas, habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números». De aquí concluye Galileo que no podemos aplicar (sin modificaciones) a los conjuntos infinitos las nociones de ser igual, menor o mayor. El principio de que el todo es mayor que la parte solo vale para los conjuntos finitos. También Bernard Bolzano (1781-1848) era consciente de esa aparentemente paradójica propiedad, que luego Dedekind utilizaría como definición del infinito.

En 1888, Dedekind publicó *Was sind und was sollen die Zahlen?*. En esta obra, Dedekind ofrecía (además de una construcción de los números naturales a partir de las nociones conjuntistas abstractas de conjunto y aplicación) su definición de finito e infinito, tomando como característica definitoria precisamente la propiedad que tan paradójica parecía a Galileo. Era la primera vez que se daba una definición precisa de finito: «Definición. Un conjunto S se llama *infinito* cuando es biyectable con una parte propia de sí mismo; en caso contrario se llama a S conjunto *finito*»[3]. El conjunto de los números naturales, por ejem-

[3] Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 64. Aquí traducimos *System* por conjunto y *ähnlich* por biyectable.

plo, es infinito, pues es biyectable con el de los números pares positivos (la biyección es $f(x)=2x$), que es una parte propia suya. Esta propiedad de los conjuntos infinitos elegida por Dedekind como definición de la infinitud es fuente de paradojas intuitivas, en contraste con nuestras intuiciones, surgidas del trato con lo finito. En efecto, estamos más acostumbrados, por ejemplo, a los hoteles finitos que a los infinitos, pese a las obvias ventajas de estos últimos. Cuando un hotel finito está lleno (hay una biyección entre sus habitaciones y sus huéspedes), ya no puede admitir más clientes. Esta engorrosa limitación desaparece en el caso de un hotel infinito. Aunque esté lleno, si llega un autobús con treinta nuevos viajeros, se los puede alojar sin problemas. Basta con reasignar a los huéspedes previos a nuevas habitaciones, de tal modo que el huésped de la habitación nº m pase a ocupar la habitación nº $30+m$, para cada número m. Así quedarán libres las primeras treinta habitaciones, en las que podrán alojarse los recién llegados. Incluso si llega un autobús infinito con infinitos nuevos clientes, tampoco hay problema. Basta con mudar a cada huésped anterior que ocupe la habitación nº m a la habitación nº $2m$. Automáticamente se quedarán libres infinitas habitaciones (todas las de número impar), en las que alojaremos a los infinitos viajeros recién llegados.

Hay otras muchas definiciones de lo finito y lo infinito. En general, A es infinito si y solo si A no es finito. Basta, pues, con definir la finitud. Si ya disponemos de los números naturales, podemos usarlos como medida de lo finito. Llamemos segmento inicial de los números naturales al conjunto de todos los números naturales menores que alguno determinado, por ejemplo, menores que el 7, es decir, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Un conjunto A es finito si y solo si A es biyectable con algún segmento inicial de los números naturales. Otras definiciones no aluden a los números naturales, como la ya citada de Dedekind (1888) o la de Tarski (1924): A es finito si y solo si cada familia no vacía de subconjuntos de A tiene un elemento minimal (respecto a $\subseteq$). Dicho de otra manera: A es finito si y solo si cada familia no vacía de partes de A posee una parte de A en la que ninguna otra parte de esa familia está propiamente incluida. Otra definición (Levy, 1981): A es finito si y solo si alguna relación es un orden lineal en A y todo orden

lineal en A es un buen orden en A. Incluso es posible enmendar la definición de Cantor (Klaua, 1979): *A es finito si y solo si hay una relación de buen orden en A cuya inversa es también una relación de buen orden en A*[4].

Entre lo finito y lo infinito hay un abismo insalvable. Partiendo de conjuntos finitos, y mediante un número finito de operaciones conjuntistas como la unión, la intersección, el producto cartesiano y el conjunto de las partes, solo obtenemos de nuevo conjuntos finitos. Lo infinito es inalcanzable desde lo finito. Para alcanzarlo hay que dar un salto mortal, que la teoría de conjuntos avala mediante un axioma específico. Una vez dado el salto, Cantor se puso a explorar lo infinito. Lo primero que descubrió fue que no hay un solo tipo de infinito, una sola cardinalidad infinita, sino muchos infinitos distintos.

Un conjunto infinito es numerable si y solo si es biyectable con el conjunto de los números naturales, N. Un conjunto infinito numerable se llama también denumerable. Un conjunto infinito que no es numerable es supernumerable.

A finales de 1873 las cartas de Cantor a Dedekind reflejan el interés de Cantor por los temas de numerabilidad de los conjuntos infinitos. Cantor, que ya sabía que hay tantos números enteros y tantos números racionales como números naturales, probó (quizá con ayuda de Dedekind) que el conjunto de todos los números algebraicos (es decir, raíces de ecuaciones algebraicas) es también biyectable con N. Vemos que muchos conjuntos infinitos son numerables: N mismo, el conjunto de los números pares, el de los impares, el de los primos, el de los enteros, el de los racionales, el de los algebraicos, etc. ¿Hay conjuntos innumerables o supernumerables? Cantor descubrió que sí.

Los resultados de Cantor sobre biyectabilidad de continuos de diferente dimensión aparecieron en su artículo «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre» (Una contribución a la teoría de conjuntos), publicado en 1878. Kronecker trataba de reducir toda la matemática a los

[4] Todas estas definiciones son equivalentes, si admitimos el axioma de elección. Si no lo admitimos, entonces la definición de Dedekind, por ejemplo, no es equivalente a la de Tarski.

números enteros, a lo finito y constructible (aunque no logró reducir sus propias contribuciones sobre funciones elípticas, desarrolladas por los métodos tradicionales del análisis). Era un precursor de las posturas de los intuicionistas posteriores y odiaba las pruebas de Cantor de la existencia de números trascendentes, las pruebas no constructivas, las pruebas de existencia que no indican cómo localizar o construir lo existente. La influencia de Kronecker hizo que la publicación del artículo citado de Cantor se atrasara un año, hasta 1878.

LA SUPERNUMERABILIDAD DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Cantor se preguntó si hay tantos números reales como naturales y, en una carta a Dedekind de 7 de diciembre de 1873, se respondió que no, que el conjunto de los reales entre 0 y 1 no es biyectable con el de los naturales. Aquí todavía no usaba la prueba diagonal posterior. A finales de diciembre, en Berlín, informó de sus resultados a Weierstrass, que le aconsejó que los publicase, cosa que hizo Cantor en 1874 en «Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen». En este trabajo aparece por primera vez (aunque sin mucho énfasis) la distinción entre diversos niveles de infinitud, pero su importancia no fue generalmente apreciada en ese momento.

En 1891, en Halle, y ante el primer congreso de la Unión de matemáticos alemanes, Cantor presentó por primera vez su famoso procedimiento diagonal para probar la supernumerabilidad del conjunto de los números reales (el continuo), que también es aplicable a otros muchos casos. Ni siquiera el intervalo de los números reales entre 0 y 1 es biyectable con N, como se prueba por reducción al absurdo. Supongamos que existiera una tal biyección. Todos los números reales en ese intervalo (escritos como expansiones decimales[5]) podrían enumerarse en una lista:

[5] Algunos números reales poseen dos expansiones decimales, por ejemplo: 0,1000... = 0,0999... En ese caso, podemos poner las dos expansiones en la lista.

el primero: $0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots$
el segundo: $0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots$
el tercero: $0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots$
el n-simo: $0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4} \ldots$

Definamos ahora (por 'diagonalización') la expansión decimal de un número real r entre 0 y 1 que no está en la lista, a saber

$$r = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$$

donde (para cada i) $a_i = 0$, si $a_{ii} \neq 0$, y $a_i = 1$, si $a_{ii} = 0$. Este número real r se diferencia del primero de la lista en el primer lugar de su expansión decimal, del segundo de la lista en el segundo lugar de su expansión decimal y, en general, se diferencia del número n-simo de la lista en el n-simo lugar de su expansión decimal. Por tanto, r no coincide con ninguno de la lista. Por tanto, la lista no puede contener todos los números reales entre 0 y 1, de donde se sigue que no puede haber una biyección entre N y el intervalo real entre 0 y 1, y, a fortiori, entre N y $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ es supernumerable.

Cantor siguió investigando las relaciones de cardinalidad y biyectabilidad. En junio de 1877 descubrió con gran sorpresa suya que el cuadrado con lado unidad (el conjunto de sus puntos) es biyectable con su lado, es decir, con los reales entre 0 y 1. En general, el conjunto de los puntos contenidos en cualquier segmento recto es biyectable con el conjunto de los puntos contenidos en el cuadrado o en el cubo o en el hipercubo de n dimensiones (para cualquier n) que tenga ese segmento como lado. Y para cualquier número finito (o denumerable) de dimensiones n, $\mathbb{R}$ es biyectable con $\mathbb{R}^n$. Dedekind se dio cuenta enseguida de que una biyección entre continuos de distinto número de dimensiones no podía ser bicontinua, aunque no supo demostrarlo. La prueba la aportaría Brouwer treinta años más tarde (1911).

CUESTIONES DE CARDINALIDAD

Ya vimos cómo Cantor había probado la supernumerabilidad del conjunto de los números reales, con lo cual quedaba claro por primera vez que había infinitos de distinto tamaño o cardinalidad. También probó (y es a lo que se llama el 'teorema de Cantor' por antonomasia) que, en general, el conjunto de las partes $\wp(A)$ de un conjunto dado A cualquiera tiene siempre una cardinalidad superior a la de ese conjunto: $|A| < |\wp A|$. Por tanto, dado un conjunto infinito, por ejemplo ω, tendremos $|\omega| < |\wp\omega| < |\wp\wp\omega| < |\wp\wp\wp\omega|$, etc. Por tanto, hay una infinidad de cardinalidades o números cardinales distintos. A la cardinalidad infinita más pequeña, es decir, a la cardinalidad de ω, la llamó Cantor $\aleph_0$, a la siguiente más grande, $\aleph_1$, a la siguiente $\aleph_2$, y así sucesivamente, con lo que obtenemos la secuencia de los alefs o números cardinales: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... Por ejemplo, $|\omega| = \aleph_0$. $\aleph_0$ es también la cardinalidad del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, del de los racionales $\mathbb{Q}$, del de los algebraicos, etc.

Cada tipo de orden o número ordinal tiene la cardinalidad del conjunto de todos los números ordinales que lo preceden. Cantor llamó primera clase de números a la clase de todos los números ordinales finitos. La segunda clase de números $Z(\aleph_0)$ es la clase de todos los tipos de orden de conjuntos bien ordenados con cardinalidad $\aleph_0$. La cardinalidad de $Z(\aleph_0)$ es $\aleph_1$, el número cardinal siguiente a $\aleph_0$. La tercera clase de números $Z(\aleph_1)$ es la clase de todos los tipos de orden de conjuntos bien ordenados de cardinalidad $\aleph_1$. La cardinalidad de $Z(\aleph_1)$ es $\aleph_2$. Y así sucesivamente. La secuencia de los alefs $\aleph_\alpha$ crece así indefinidamente con subíndices ordinales crecientes. Los números gigantes[6] ε pertenecen todos a la segunda clase de números, y son por lo tanto meros enanos en comparación con lo que viene detrás. No es de extrañar que la exploración de los cardinales transfinitos produzca fácilmente vértigo.

En los *Beiträge* (1895-1897), Cantor se planteó el problema de si dos cardinales son siempre comparables, pero no pudo resolverlo, pues es equivalente al axioma de elección, como Hartogs probó en 1915.

[6] Véase su definición en la página 128.

Cantor formuló el teorema de equivalencia (hoy, de Bernstein) —que si A es biyectable con un subconjunto de B y B es biyectable con un subconjunto de A, entonces A y B son biyectables— como una consecuencia de la comparabilidad, pero fue su alumno Felix Bernstein quien lo probó (independientemente de la comparabilidad) en 1897 en el seminario de Cantor, y por eso lleva su nombre. Cantor definió suma, producto y exponenciación de cardinales, que son muy distintas de las ordinales, y en cierto modo más sencillas (aunque aquí renunciamos a exponerlas). A partir de ahí logró probar inmediata y elegantemente la biyectabilidad de un continuo n-dimensional con otro 1-dimensional, que ya había probado en 1884 de un modo mucho más farragoso. También creyó probar que todo conjunto transfinito posee un subconjunto denumerable, usando sin darse cuenta el axioma de elección.

1884-1897: PERIODO DE CRISIS

La enfermedad nerviosa de Cantor tuvo su primera manifestación en una crisis surgida en mayo de 1884, cuando contaba treinta y nueve años de edad, y acababa de regresar de un viaje al parecer exitoso y placentero a París. Durante ese viaje se había entrevistado con matemáticos como Hermite y Poincaré, que estaban al corriente de su teoría transfinita; había visitado museos y galerías de arte e incluso había acudido a la ópera y al teatro. Sin embargo, al regresar a Halle le dio el primero de una serie de ataques que luego se repetirían a lo largo del resto de su vida. Se trataba de una enfermedad maníaco-depresiva, en la que periodos de gran excitación eran seguidos de depresiones profundas. Entre 1884 y 1899 los periodos de enfermedad se alternaban con más largos periodos de normalidad, en los que era un padre de familia afectivo y un profesor competente y dedicado. La enfermedad maníaco-depresiva parece ser básicamente endógena y tener un fuerte componente genético. Cantor mismo pensaba que la irritación que le producía su disputa con Kronecker contribuía a su enfermedad, por lo que decidió hacer las paces con él y le escribió una carta de reconciliación. Kronecker, que sabía de la enfermedad de Cantor, le contestó

amablemente, con lo que la enemistad personal quedaba zanjada, al menos oficialmente, aunque persistían las diferencias de opinión y la mutua antipatía.

Schoenflies, escribiendo sobre Cantor, señaló tanto su disputa con Kronecker como sus denodados e infructuosos esfuerzos por resolver el problema del continuo como causas de su enfermedad. En efecto, Cantor había estado enfrascado durante esos años en un intento titánico por resolver dos problemas insolubles (con los principios entonces disponibles): probar que todo conjunto puede ser bien ordenado (lo que es necesario para que todos los cardinales infinitos sean alefs) y resolver el problema del continuo (si hay conjuntos de cardinalidad intermedia entre la del conjunto de los números naturales y la de los números reales o no). Es posible que estos dos problemas lo dejaran exhausto. Pero también es posible que su enfermedad fuera meramente endógena. De hecho, su médico de cabecera notaba que el dedicarse a la matemática le sentaba bien a Cantor y le proporcionaba más paz que otra cosa. Sea ello como fuere, en mayo de 1884 cayó enfermo y su periodo más creativo se acabó. A finales de 1884 volvió a sufrir otra crisis. Incluso en los documentos escritos se aprecia un cambio en su letra y en su manera de escribir. A partir de entonces, la vida de Cantor estaría salpicada de crisis neuróticas recurrentes e imprevisibles, que llenaban de zozobra y sobresalto a su familia.

Desde su etapa de estudiante en Berlín, en que ambos habían coincidido en clase de Weierstrass, Cantor conocía al matemático sueco Gösta Mittag-Leffler, que se había casado con una millonaria y disponía de dinero, con el que editaba la revista *Acta Mathematica*, en la que publicó la traducción al francés de los trabajos de Cantor, así como otros nuevos. Era el confidente epistolar de Cantor, al que este con frecuencia escribía, contándole sus cuitas y preocupaciones. Cuando Cantor se enteró de que Kronecker quería publicar una crítica de la teoría de conjuntos como insignificante precisamente en la misma revista —*Acta Mathematica*— en la que él había publicado sus trabajos, montó en cólera y con característica convicción escribió a Mittag-Leffler: «Quizá sus bodrios ... necesiten del efímero poder que él ha sabido acumular. Para mis trabajos reclamo la toma de partido, no a favor de mi efí-

mera persona, sino a favor de la *verdad*, que es *eterna* y contempla con desprecio a los intrigantes que osan imaginarse que a la larga podrán afectarla con su miserable palabrería»[7].

Ya vimos que en 1882 se había enfriado la relación de Cantor con Dedekind. Su amigo de juventud, el matemático Schwarz, se había acabado enemistando con él. Y en 1885, Cantor sufrió una gran decepción. Había enviado un artículo novedoso sobre tipos de orden a su amigo Mittag-Leffler para su publicación en *Acta Mathematica*, como era habitual, pero esta vez Mittag-Leffler se lo rechazó. A partir de ese momento, Cantor empezó a descuidar sus investigaciones matemáticas y a dedicar mucha atención a la filosofía, a la teología y a la historia de la literatura. Especialmente notoria fue su entusiasta dedicación a la defensa de la 'teoría baconista' de las obras de Shakespeare (es decir, su atribución a Francis Bacon).

La polémica Bacon-Shakespeare

En el siglo XIX el aprecio por los dramas y la poesía de Shakespeare llegó a su paroxismo. Muchos consideraban que el autor de tan excelsas obras debía ser un semidiós, y les parecía inconcebible que fuera un hombre de familia modesta y escasos estudios. Empezó a fraguarse la leyenda de que esas obras habrían sido escritas en realidad por algún aristócrata muy culto, que habría preferido permanecer en el anonimato. Shakespeare se habría limitado a su montaje escénico. Tales especulaciones apuntaban a diversos personajes nobles de la época, y en particular a Sir Francis Bacon (1561-1626), filósofo y político, que llegó a ser Lord Canciller del reino, propulsor del conocimiento experimental, inductivo e instrumental, hijo de un alto funcionario del gobierno, formado en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, y coetáneo de William Shakespeare (1564-1616). Esta 'teoría' llegó a Alemania en los años ochenta del siglo XIX y provocó cientos de artículos fantasiosos sobre el tema, ante la indignación de los filólogos, que la rechazaban decididamente.

[7] Carta reproducida en Schoenflies, 1927.

Desde 1884, Cantor estuvo interesado por esta 'teoría baconista' y dos años después decidió salir a la palestra en su defensa. En una carta de 1886, Cantor informa de su primer acto público en este sentido: «El viernes pasado he hablado en público aquí en Halle en una reunión de 40 profesores universitarios por primera vez a favor de Bacon. *Alea jacta est!* El ambiente en la sala me era muy hostil y dificultaba enormemente mi exposición»[8]. Cantor se revolvía contra la idea de que Bacon hubiera sido un materialista. Él prefería presentarlo como un hombre de ideas elevadas y próximo al catolicismo. En 1896 editó la *Confessio fidei* de Bacon y la publicó con un prólogo (suyo) anónimo. Incluso envió varios ejemplares al papa León XIII, uno de ellos lujosamente encuadernado en cuero especial. En ese mismo año publicó también la obra en latín *Resurrectio divi Quirini Francisci Baconi...*, donde reproduce un poema de Thomas Randolph en el que aparece la palabra *Quirinus*, que Cantor interpretaba como procedente de *quirus* (lanza) y referente a Francis Bacon (lo cual nadie acepta). A partir de ahí argumentaba que *Quirinus* quiere decir 'el que agita la lanza' o, en inglés, *spear-shaker*, es decir, Shakespeare, ¡con lo que quedaba demostrado que Bacon es Shakespeare! Al año siguiente volvió a publicar otro escrito en defensa de la tesis baconista.

También daba conferencias sobre el asunto. En 1899 el matemático Kowalewski asistió en Leipzig a dos conferencias de Cantor sobre el tema y comentó: «Puesto que Cantor realmente no sabe inglés, leyó las citas inglesas con una pronunciación de su propia cosecha, lo que sonaba sumamente extraño. Como todos los poseídos por una idea, se sentía perseguido por mucha gente que temía sus argumentos. Incluso pensaba que sus descubrimientos [sobre Bacon-Shakespeare] tenían importancia geopolítica y que por eso se lo quería silenciar»[9]. Al parecer, y a consecuencia de su campaña, fue expulsado de la Sociedad Shakespeariana, de la que era miembro. En 1899, en una carta a Dedekind, anuncia su intención de abandonar el tema:

[8] En Purkert & Ilgauds, 1987, pág. 84.

[9] En Kowalewski, 1950, pág. 124.

«ya he dejado en paz la cuestión Bacon-Shakespeare, que me ha costado tanto tiempo y dinero; para continuar con ella, tendría que realizar aún mayores sacrificios, viajar a Inglaterra, ...». En efecto, se había gastado mucho dinero y había llegado a reunir una magnífica biblioteca de obras inglesas de los siglos XVI y XVII. A pesar del anuncio, al año siguiente volvió a escribir otro panfleto sobre el mismo tema. En sus periodos maníaco-depresivos la polémica se volvía especialmente absurda. Esa afición a deshacer presuntos entuertos de suplantación de autoría la aplicó también a otros autores famosos y de familia humilde, como el matemático inglés John Dee o el filósofo alemán Jakob Böhme. En 1898 dictó en la Universidad de Halle un curso sobre «La vida y la obra de Francis Bacon»; en 1900, otro «Sobre el verdadero autor de las llamadas obras de Böhme y sobre la esencia de su teosofía».

Aunque las cartas de la época más creativa de Cantor se han perdido, se conservan bastantes de la época de crisis entre 1884 y 1896, lo que nos permite conocer algunos de sus extraños intereses y contactos, como el habido con Langbehn.

Julius Langbehn era un intelectual privado, alejado de cualquier institución académica, solitario y vanidoso, ecléctico y confuso, de tendencias irracionalistas, nacionalistas y a veces racistas, que sometía toda la cultura de su tiempo a una crítica radical. Pensaba que la ciencia era perversa y que la salvación solo podía esperarse de una vuelta a las raíces artísticas del pueblo alemán. Lo curisoso del caso es que el libro que publicó anónimamente en 1890, titulado *Rembrandt als Erzieher* (Rembrandt como educador), obtuvo un éxito instantáneo y alcanzó 39 ediciones en dos años. Desde octubre de 1890 y durante algo más de un año, Cantor mantuvo una animada correspondencia con Langbehn, quizás iniciada por el intento de Cantor de convencerle de la tesis baconista sobre las obras de Shakespeare. En cualquier caso, las abultadas tonterías de Langbehn y su temperamento autoritario, que apenas aguantaba críticas, pronto acabaron hartando a Cantor, que rompió con él en noviembre de 1891.

FILOSOFÍA

Cantor se interesó por la filosofía mucho más que los otros matemáticos de su tiempo. Su posición filosófica fundamental era un platonismo extremo y decidido. Cantor pensaba que las entidades matemáticas tienen una existencia eterna y absoluta, como las ideas platónicas. A la afirmación de Hermite de que los números son tan reales como las cosas naturales, Cantor replicó que no son tan reales, sino mucho más reales. En una nota de 1913 escribe: «La metafísica, tal como yo la concibo, es la doctrina del ser o, lo que es lo mismo, la doctrina de lo que existe, del mundo tal como es en sí mismo, no tal como nos aparece. Todo lo que percibimos con los sentidos y nos imaginamos con nuestro pensamiento abstracto es no-ser y, por tanto, a lo sumo una huella del ser en sí» [10]. La teoría de conjuntos, según Cantor, trata del mundo en sí. En una carta al sacerdote Th. Esser escribe Cantor: «La teoría general de conjuntos ... pertenece completamente a la metafísica». Cantor pensaba que las ideas objetivas determinan la realidad. «Esta convicción mía coincide esencialmente con los principios del sistema platónico, y también con ciertos rasgos esenciales del sistema de Spinoza» [11].

Cantor se planteó la pregunta ontológica por el tipo de existencia que tienen los conjuntos y los números transfinitos. Pensaba que esas entidades existen con independencia del mundo natural y de la mente del matemático. Él nunca decía que construía los números transfinitos, sino que los encontraba, descubría o reconocía. Y, aunque la consistencia era una condición necesaria de la existencia de las entidades, no era suficiente.

En un famoso texto de 1883 (al que Torretti [12] concede especial importancia filosófica), Cantor distingue dos sentidos en los que podemos hablar de la existencia o realidad de las entidades matemáticas,

[10] Citado en Purkert & Ilgauds, pág. 108.

[11] En *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, reimpreso en Cantor, 1966, pág. 206.

[12] Roberto Torretti, en *El paraíso de Cantor*, pág. 58.

como los números, o de cualesquiera ideas o conceptos en general. Por un lado, existen

> en cuanto ocupan, en base a definiciones, un lugar enteramente determinado en nuestro entendimiento y se distinguen perfectamente de todos los demás componentes de nuestro pensamiento, con los que tienen determinadas relaciones y así modifican de una determinada manera la sustancia de nuestro espíritu. Permítaseme llamar a esa forma de realidad de nuestros números su realidad *intrasubjetiva* o *inmanente*. También cabe atribuir a los números realidad en la medida en que deben concebirse como expresión y representación de procesos y relaciones en el mundo exterior extramental y en que las diversas clases de números ... representan cardinalidades que de hecho se dan en la naturaleza corpórea y espiritual. A este segundo tipo de realidad lo llamo la realidad *transubjetiva* o *trascendente* de los números» [13].

Tras afirmar que los conceptos que tienen realidad inmanente de alguna manera clara o misteriosa siempre tienen también realidad trascendente, hace un canto a la libertad de la matemática, que puede desentenderse de la realidad trascendente y concentrarse en la inmanente:

> La matemática ... en la elaboración de su caudal de ideas tiene que considerar *única* y *exclusivamente* la realidad *inmanente* de sus conceptos, y no tienen *ninguna* obligación de examinarlos en lo que respecta a su realidad *trascendente*. Por esa privilegiada situación, que la distingue de todas las otras ciencias, ... merece muy especialmente el nombre de *matemática libre*, una denominación ... que yo preferiría a la de matemática 'pura'.

A continuación, Cantor afirma que «la matemática es completamente libre en su desarrollo», y solo está restringida por la doble con-

[13] En el apartado 8 del n.º 5 de *Über unendlich lineare Puktmannigfaltigkeiten*. Reproducido en GA, pág. 181.

dición de que sus nuevos conceptos (1) deben estar libres de contradicción interna y (2) deben estar relacionados por definiciones precisas con los conceptos anteriores. Estas condiciones «dejan al arbitrio un campo muy reducido, y además cada concepto matemático lleva en sí mismo el correctivo necesario; si es estéril o inadecuado, él mismo lo muestra muy pronto con su inutilidad, y entonces es descartado por falta de éxito». Este autocontrol de los conceptos es más que suficiente y no se requiere ninguna otra justificación. En definitiva, «la *esencia* de la *matemática* consite precisamente en su *libertad*» [14]. El hecho de que la matemática no dependa para nada de la experiencia empírica es el fundamento de su libertad. Y en nombre de esa libertad, Cantor animaba a los jóvenes asistentes de su universidad a pensar por su cuenta. «Lo que más aprecio en los jóvenes matemáticos es su sentido de la libertad y la independencia, y en esto soy lo contrario del Sr. Kronecker, al que estaba especialmente dirigida mi apología de la libertad en la matemática ..., aunque él parece no haberlo notado» [15].

Esta grandiosa concepción de la matemática era a la vez una defensa de Cantor frente a sus enemigos en el *establishment* académico alemán, una defensa de la teoría de conjuntos con sus ordinales y cardinales transfinitos frente a sus críticos, y una liberación de todos los matemáticos. Mientras uno no se contradiga y mientras lo que uno haga sirva para algo, todo está permitido en la matemática. Es el paraíso de Cantor, del que luego hablaría Hilbert, del que ya nadie podría echarnos. Para Hilbert mismo, la cuestión de la consistencia pasaría a ocupar el primer plano.

De todos modos, se aprecia una gran tensión en la filosofía matemática de Cantor. Las exigencias cantorianas de consistencia y fecundidad apuntan más hacia el formalismo y el pragmatismo que hacia el platonismo ontológico que él por otro lado sostiene. Si las ideas y entidades matemáticas existen en un mundo ideal independientemente de la mente humana, ¿cómo es que basta limitarse en matemáticas al aspecto inmanente de las ideas? En esta aparente tensión el platonis-

[14] Cantor, 1966, pág. 182.
[15] En Purkert & Ilgauds, 1987, pág. 113.

mo acabaría siendo abandonado por Hilbert, que haría suyo el programa formalista y pragmatista aquí implícitamente expuesto. Pero Cantor mismo siguió siendo platónico, y creyendo en la realidad trascendente de las construcciones conjuntistas. Incluso después de iniciada su penosa enfermedad nerviosa, Cantor siguió pensando en la teoría de conjuntos y estando seguro de sus tesis transfinitarias. En una carta a Jeiler de 1888 comenta: «No tengo ninguna duda sobre la verdad de lo transfinito, que yo he descubierto (*erkannt*) con la ayuda de Dios, y cuya variedad y unidad estudio desde hace más de veinte años».

Cantor pensaba que a las ideas corresponden siempre aspectos de la realidad física. ¿A qué aspectos de la realidad física corresponden los números transfinitos? Cantor pensaba que hay dos clases de materia, la materia corporal (*Körpermaterie*) y la materia etérea (*Äthermaterie*), compuestas respectivamente por mónadas corporales (de las que hay solo una infinitud numerable, $\aleph_0$) y por mónadas etéreas (de las que hay una infinitud supernumerable, $\aleph_1$), haciendo uso de una terminología explícitamente leibniziana. Como escribía en 1885: «a este respecto hace ya años que mantengo la hipótesis de que la cardinalidad de la materia corporal es la que en mis investigaciones llamo la primera cardinalidad, mientras que la cardinalidad de la materia etérea es la segunda» [16]. A esta tesis la llamaba su «primera hipótesis acerca del mundo». Repetidamente anunció futuros trabajos en que la demostraría a partir de la doctrina de los ordinales transfinitos, pero nunca llegó a publicarlos. Esta especulación se basaba sin duda en el papel que la noción de éter desempeñaba en la física de la época, aunque Cantor sentía gran desconfianza por las ciencias naturales de su tiempo, a las que consideraba aquejadas de materialismo.

Gran parte de las reflexiones filosóficas de Cantor se centraban en la defensa del infinito actual. Se interesó por todo tipo de argumentos filosóficos, teológicos o matemáticos que en el pasado se hubieran

[16] G. Cantor. 1885. Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung. *Acta mathematica*, 2: 105-124.

dado a favor o en contra del infinito actual, que él creía haber asentado sobre bases sólidas con su teoría transfinita de conjuntos. Cantor se opuso, analizó y deshizo todos los argumentos contra el infinito actual 'grande'. Sin embargo, hizo suyos argumentos similares para oponerse a lo infinitamente pequeño y a los números infinitesimales, a los que en una carta de 1893 llama «los bacilos del cólera infinitarios de la matemática». Cantor trató de probar (con ayuda de la teoría de los números ordinales) que no puede haber números infinitamente pequeños, sin conseguirlo. Como señaló Ernst Zermelo, «la no-existencia de magnitudes actuales infinitamente pequeñas no se puede probar, lo mismo que tampoco se puede la de las infinitamente grandes». De hecho, en 1960, Abraham Robinson acabaría estableciendo sobre bases rigurosas los infinitesimales, dando lugar al análisis no-estándar.

Cantor trató de influir en la vida filosófica alemana. Le parecía que los historiadores de la filosofía no prestaban suficiente atención a la filosofía cristiana y trató de fundar una revista para promover su estudio y rellenar esa laguna. Recomendó (sin éxito) a Edmund Husserl para una cátedra en Freiburg. A diferencia de la gran mayoría de los científicos de su tiempo, Cantor se oponía al positivismo, al materialismo y al evolucionismo. Por el contrario, sentía gran respeto y simpatía por el tomismo y neotomismo. Cantor poseía muchos libros de teología, que leía y conocía, especialmente si tenían algo que ver con la cuestión del infinito. Conocía bien los escritos de los padres de la Iglesia y de los escolásticos. Mantenía abundante correspondencia con varios jesuitas e incluso con el cardenal Franzelin, que pensaba que Cantor estaba a punto de convertirse al catolicismo, cosa que nunca hizo. Cantor apreciaba muy particularmente a Santo Tomás de Aquino, a cuya filosofía se refería como la *philosophia perennis*. Varias veces alabó la encíclica *Aeterni patris* del papa León XIII, que trataba de relanzar el tomismo. Apoyaba la idea papal de usar la ciencia para defender la religión. Cantor trataba de librar a los teólogos de sus posibles errores relativos al infinito, al tiempo que los apoyaba en su oposición a las corrientes científicas peligrosas, como en la agria polémica contra Ernst Haeckel, el principal propulsor del evolucionismo biológico en Alemania.

La filosofía y teología escolástica era una cantera de discusiones sobre el infinito actual, surgidas a propósito del tratamiento de temas como el origen o la eternidad del mundo, la muerte e inmortalidad humana y, sobre todo, la naturaleza de Dios y las propiedades divinas. Plotino había postulado toda una serie de infinidades intermedias entre la absoluta trascendencia divina y la finitud, idea elaborada por los escolásticos, y con la que simpatizaba Cantor, que la veía próxima a sus alefs. Como escribía Kowalewski, «estas cardinalidades, los alefs, eran para Cantor algo sagrado, por así decir, los escalones que conducen al trono de la infinitud, al trono de Dios» [17].

A pesar de sus coqueteos con los clérigos y teólogos católicos, Cantor siempre siguió siendo protestante, aunque sin dar demasiada importancia a esas diferencias sectarias. En realidad, su pensamiento cristiano era independiente de las diversas iglesias oficiales, como muestra su tesis de que José de Arimatea (que aparece en los Evangelios como recogiendo el cadáver de Jesús para enterrarlo, tras la crucifixión) era el padre carnal de Jesucristo. En 1905 publicó *Ex Oriente Lux*, en que defiende esta tesis, que por otro lado él no era el único en sostener.

La *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*

La idea cantoriana de que la matemática es el reino de la libertad le llevó a oponerse al autoritarismo de la universidad alemana y, en general, al excesivo peso de los matemáticos de Berlín, como Kronecker (contra el que ya vimos que iban dirigidas sus observaciones sobre la ciencia libre). Esta preocupación culminó con sus denodados esfuerzos para constituir una unión o asociación alemana de matemáticos, donde todos pudieran intercambiar ideas y discutir en un plano de igualdad.

En 1822 se había constituido la Sociedad de Científicos y Médicos Alemanes, de la que los matemáticos eran una mera sección. En la reu-

[17] G. Kowalewski, 1950, *Bestand und Wandel*. München, pág. 201.

nión de esta sociedad celebrada en Bremen en 1890, los matemáti presentes decidieron separarse y fundar la Unión Alemana de Mate ticos (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*), de la que eligieron a C tor como primer presidente. Entre los matemáticos presentes se contraban Felix Klein, David Hilbert y Hermann Minkowski. Tod operación había sido cuidadosamente preparada por Cantor, con la a da de algunos colegas.

La primera reunión separada de la nueva sociedad se celebr año siguiente, 1891, en Halle, organizada por Cantor. El flamante p sidente invitó a su enemigo Kronecker a dar la conferencia inaugu quizá para buscar su favor y apartarlo de sus críticas a la teoría de c juntos, aunque al final Kronecker no pudo asistir, por la muerte de mujer. Cantor fue reelegido presidente. Además, y ante los matem cos de la Unión reunidos en Halle, pronunció una brillante confer cia, en la que presentó por primera vez su famoso procedimiento d gonal para probar la supernumerabilidad de ciertos conjuntos, com de los números reales (el continuo).

En 1892, la reunión de la Unión Alemana de Matemáticos, cuya lebración estaba prevista en Nürnberg, tuvo que ser suspendida peligro de cólera en esa ciudad. En torno a esta cuestión hubo dis pancias en la dirección de la Unión, que llevaron a Cantor a dimitir la presidencia.

Cantor también trató de promover la creación de una Unión In nacional de Matemáticos, que finalmente se constituyó en Zürich 1897. Cantor asistió como oyente, y tuvo la satisfacción de compro cómo sus ideas se abrían camino. Especialmente Hurwitz pronun una conferencia principal sobre la teoría de las funciones analíticas, la que clasificó las funciones analíticas unívocas según la cardinali del conjunto de sus puntos singulares, introduciendo y usando expl tamente nociones y resultados de la teoría cantoriana de conjuntos. I Congreso Internacional de Matemáticos tuvo lugar en París en 19 y Cantor no asistió, aunque sí al siguiente, celebrado en Heidelberg 1904.

NÚMEROS ORDINALES

Además de su teoría de los números reales, el artículo «Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen» (1872), contenía otra notable novedad, de gran importancia en el desarrollo de la topología conjuntista, la noción de conjunto derivado de puntos. Sea b un punto del conjunto lineal A (por ejemplo, un segmento de la recta real). b es un punto de acumulación de A si y solo si cada entorno de b posee infinitos puntos de A. A', el primer conjunto derivado de A, es el conjunto de los puntos de acumulación de A. A'', el segundo conjunto derivado de A, es el conjunto de los puntos de acumulación de A'. $A^{(n+1)}$, el $n+1$-simo conjunto derivado de A, es el conjunto de los puntos de acumulación del n-simo conjunto derivado de A, es decir, de $A^{(n)}$. Como quien no quiere la cosa, y en reflexiones sucesivas, Cantor forma $A^{(\omega)}$, el conjunto derivado ω-ésimo, como la intersección de todos los conjuntos derivados n-simos (para cualquier número natural n). Y continúa la iteración definiendo los conjuntos derivados $A^{(\omega+1)}$, $A^{(\omega+2)}$, etc. El proceso de iteración de la derivación sucesiva de un conjunto de puntos lleva a Cantor a la idea de los números ordinales transfinitos, columna vertebral de su teoría de conjuntos.

Entre 1879 y 1884, Cantor fue publicando en seis entregas sucesivas su obra maestra, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Sobre conjuntos lineales infinitos de puntos), donde aparecen ya muchas nociones y construcciones de la teoría de conjuntos, incluida la teoría desarrollada de los números ordinales y diversos temas de teoría descriptiva.

Una vez superado el primer ataque de su enfermedad mental, en 1884, Cantor se puso de nuevo a trabajar. A finales de 1884 ya había desarrollado una teoría completa de los tipos de orden, además de obtener nuevos resultados sobre conjuntos de puntos. Cantor había escrito su trabajo y lo había enviado para su publicación a la revista sueca *Acta Mathematica*, dirigida por su amigo Mittag-Leffler.

Al inicio de su trabajo, Cantor identifica la matemática pura con la teoría pura de conjuntos. Luego afirma que la teoría de los tipos de orden tiene aplicaciones en las ciencias, incluso en la química y la biolo-

gía, aunque sin decir cuáles serían. Define la noción de conjunto. Dos conjuntos linealmente ordenados son similares (*ähnlich*) (isomorfos, diríamos ahora) si entre ellos hay una biyección que preserva la relación de orden. El tipo de orden de un conjunto ordenado es el concepto que se aplica a todos y solos los conjuntos ordenados similares al conjunto ordenado dado. Introduce el tipo de orden ω de los números naturales, el tipo η de los números racionales entre 0 y 1, etc. Prueba el importante teorema que permite caracterizar el tipo η con independencia de los racionales: cada conjunto ordenado numerable y denso sin elemento máximo ni mínimo tiene el tipo de orden η. Reduce los números a tipos de orden. Los números naturales son los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados finitos. Los números ordinales transfinitos son los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados infinitos. Define la noción de orden inverso, de número finito e infinito, de suma y producto de tipos de orden, etc.

Aunque ya había recibido galeradas de su artículo, en marzo de 1885 Cantor recibió una carta de Mittag-Leffler, proponiendo posponer su publicación hasta que no se encontrasen aplicaciones de la nueva teoría. Cantor, ofendido, retiró su manuscrito [18]. En los diez años siguientes no publicó nada en revistas matemáticas, con la única excepción de una nota en el primer volumen del informe anual de la Unión Alemana de Matemáticos de 1892, que contiene el procedimiento diagonal expuesto por Cantor en Halle el año anterior.

En los años noventa, Cantor volvió a escribir de teoría de conjuntos, y en 1895 y 1897 publicó en dos partes en *Mathematische Annalen*, su última obra, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (Contribuciones a la fundamentación de la teoría transfinita de conjuntos), en la que resume y culmina toda su investigación anterior sobre esta materia. Cantor define las nociones de conjunto, unión, inclusión, cardinalidad, biyectabilidad, etc. La obra comienza con la famosa definición de conjunto: «Por 'conjunto' entendemos cualquier reunión

[18] Este manuscrito permaneció desconocido y perdido hasta que fue reencontrado y publicado en 1970 por I. Grattan-Guinness, «An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen (1885). Erste Mitteilung», *Acta Mathematica*, 124: 65-107.

en un todo M de determinados objetos distintos de nuestra intuición o nuestro pensamiento (que se llaman los elementos del conjunto)». Esta definición de 1895 es más abstracta que la de 1883, que todavía requería que los elementos del conjunto estuvieran dados por una ley. Como señala Torretti [19], se da aquí una evolución comparable a la que experimenta el concepto de función entre D'Alembert (función dada por una ley o expresión) y Dirichlet (función como correspondencia unívoca cualquiera). Aquí aparece también publicada por primera vez la famosa teoría cantoriana de los ordinales como tipos de similaridad de conjuntos bien ordenados, previamente escrita en el artículo rechazado de 1885, aunque esta vez con mayor claridad matemática y habiendo suprimido cualquier especulación filosófica concomitante. Un número ordinal es el tipo de orden de un conjunto bien ordenado.

Tipos de orden

Ahora resumimos las principales nociones de la teoría cantoriana del orden.

La noción de orden lineal generaliza rasgos típicos de la relación de ser menor que entre números naturales o de preceder a otro entre puntos de la línea. Se trata de un orden de precedencia, pues la relación en cuestión ordena los elementos que interrelaciona en el sentido de que establece entre ellos ciertas precedencias. Se conoce como orden lineal (por analogía con el orden de los puntos a lo largo de una línea) u orden total (por contraposición a parcial). Frente al mero orden parcial, el orden lineal exige que dos elementos distintos cualesquiera sean comparables (respecto a la relación de orden), es decir, es necesario que uno de ellos preceda al otro. Es frecuente usar el signo $<$ (en vez de R) para simbolizar la relación binaria de un orden lineal cualquiera.

Sea A un conjunto no vacío y sea $<$ una relación binaria en A. $(A, <)$ es un **orden lineal** si y solo si (1) $<$ es irreflexiva y transitiva (y, por tan-

[19] Roberto Torretti, en *El paraíso de Cantor*, pág. 8.

to, asimétrica) en A y (2) para cada $x, y \in A$ ocurre que $x<y$ o $y<x$ o $x=y$.

B es un **intervalo** del orden lineal $(A, <)$ si y solo si B es un subconjunto de A, tal que cualquier elemento de A que está entre dos elementos de B pertenece también a B. Si (A, R) es un orden lineal, entonces (A, R^{-1}) también es un orden lineal, el orden lineal **dual** a (A, R). El orden lineal dual a $(A, <)$ se representa como $(A, >)$.

La noción de tipo de orden de un conjunto linealmente ordenado fue publicada por Cantor en 1895. Su definición explícita es: el tipo de orden de un conjunto M es «el concepto general que resulta de M cuando solo abstraemos de la naturaleza de los elementos de M, pero conservamos el orden en que están dados»[20]. A continuación ofrecemos un resumen modernizado de la teoría cantoriana de los tipos de orden.

Sean (A, R) y (B, S) órdenes lineales.

Un **isomorfismo** de (A, R) en (B, S) es una función biyectiva $f: A \to B$ que preserva el orden, es decir, tal que $\forall xy \in A\ (xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y))$.

(A, R) y (B, S) son **isomorfos** si y solo si hay un isomorfismo entre ellos. La isomorfía se simboliza mediante el signo $\simeq$. El hecho de que (A,R) y (B,S) son isomorfos se indica así: $(A, R) \simeq (B, S)$.

Si dos órdenes lineales son isomorfos, entonces tienen el mismo tipo de orden. La noción de **tipo de orden** es una función definida para todos los órdenes lineales, tal que para cualesquiera órdenes lineales (A, R) y (B, S):

$$\text{tipo}\ (A, R) = \text{tipo}\ (B, S) \Leftrightarrow (A, R) \simeq (B, S).$$

La relación de isomorfía entre órdenes lineales es una relación de equivalencia, que da lugar a una partición de la clase de los órdenes lineales en clases de equivalencia, y es posible identificar cada una de estas clases con un tipo de orden. De todos modos, y debido a las dificultades técnicas asociadas con las clases de tamaño o cardinalidad enorme, posteriormente, y siguiendo a von Neumann, se ha preferido

[20] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* (editado por Ernst Zermelo), pág. 297.

identificar cada tipo de orden con un representante de una de esas clases de equivalencia.

Un orden lineal (A, R) tiene el tipo de orden τ, si τ es el representante elegido de la clase de equivalencia (respecto a isomorfía) de (A, R). Por tanto, τ es un orden lineal, tal que $(A, R) \simeq \tau$.

Sea $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ (respectivamente) el conjunto de los números naturales, enteros y racionales. Sea $<$ la (en cada caso distinta) relación de 'ser menor que' entre los números correspondientes. Se suelen usar las letras griegas ω, ζ y η para referirse a los tipos de orden respectivos:

$$\omega = \text{tipo } (\mathbb{N}, <)$$
$$\zeta = \text{tipo } (\mathbb{Z}, <)$$
$$\eta = \text{tipo } (\mathbb{Q}, <)$$

ω puede identificarse con $(\mathbb{N}, <)$ como el representante elegido de su clase de equivalencia. Por tanto, ω es el orden lineal de los números naturales en su ordenación estándar y, al mismo tiempo (y como representante elegido) es el tipo de orden de sí mismo y de todos los órdenes lineales isomorfos con él.

$$\omega = \text{tipo } (\mathbb{N}, <) = (\mathbb{N}, <) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$$

Si τ es el tipo de orden de $(A, <)$, entonces τ^* es el tipo de orden inverso, es decir, el tipo de orden del orden dual $(A, >)$ —que también es un orden lineal, si $(a, <)$ lo es—. Así, mientras ω es el tipo de orden de $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$, ω^* es el tipo de orden de $(\ldots, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$. $\omega \neq \omega^*$, ya que, por ejemplo, ω tiene un mínimo, y ω^* no. Mientras ζ es el tipo de orden de $(\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, ζ^* es el tipo de orden de $(\ldots 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots)$. En este caso, sin embargo, ambos tipos de orden coinciden, $\zeta = \zeta^*$, pues los correspondientes órdenes lineales son isomorfos (bajo el isomorfismo $f(x) = -x$). También $\eta = \eta^*$.

Del hecho de que dos órdenes lineales tengan el mismo tipo de orden se sigue que son isomorfos y, por tanto, que tienen la misma cardinalidad. Pero, en general, no vale la inversa, es decir, dos órdenes lineales pueden tener la misma cardinalidad sin ser isomorfos y, por

tanto, sin tener el mismo tipo de orden. Es lo que sucede, por ejemplo, con $(\mathbb{N}, <)$ y $(\mathbb{N}, >)$, según acabamos de ver. Todos los órdenes lineales con igual cardinalidad y distinto tipo de orden son infinitos.

Todos los órdenes lineales finitos con la misma cardinalidad son isomorfos entre sí y, por tanto, tienen el mismo tipo de orden. Para cualesquiera órdenes lineales finitos (A, R) y (B, S):

$$\text{tipo } (A, R) = \text{tipo } (B, S) \text{ si y solo si } |A| = |B|$$

Todos los órdenes lineales finitos con el mismo número m de elementos tienen el mismo tipo de orden, que identificamos con el segmento inicial $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, m-1)$ de ω, elegido como representante de esa clase de equivalencia. A su vez, los segmentos iniciales de ω pueden ser identificados con los números naturales, con lo que podemos considerar que los números naturales son los tipos de orden de los órdenes lineales finitos. Así pues, para cualquier orden lineal finito (A, R):

$$|A| = m \text{ si y solo si tipo } (A, R) = (\{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}, <) = (0, 1, 2, 3, \ldots, m-1)$$

Si (A, R) es un orden lineal infinito y cada uno de sus elementos tiene solo un número finito de predecesores, entonces tipo $(A, R) = \omega$.

A continuación, ponemos algunos ejemplos de tipos de orden.

Ejemplos

Tipos de orden de diversas ordenaciones de los números naturales:

tipo $(0, 1, 2, 3, \ldots) = \omega$
tipo $(\ldots, 3, 2, 1, 0) = \omega^*$
tipo $(0, 2, 4, 6, \ldots \ldots, 5, 3, 1) = \omega + \omega^*$
tipo $(\ldots, 5, 3, 1, 0, 2, 4, 6, \ldots) = \omega^* + \omega = \zeta$
tipo $(1, 2, 3, 4, \ldots 0) = \omega + 1$
tipo $(0, 2, 3, 4, \ldots 1) = \omega + 1$

tipo $(2, 3, 4, 5, \ldots 0,1) = \omega+2$
tipo $(3, 4, 5, 6, \ldots 0, 1, 2) = \omega+3$
tipo $(0, 1, 6, 7, 8, \ldots 2, 3, 4, 5) = \omega+4$
tipo $(0, 2, 4, 6, \ldots 1, 3, 5, \ldots) = \omega+\omega = \omega\cdot 2$
tipo $(0, 3, 6, 9, \ldots 1, 4, 7, 10, \ldots 2, 5, 8, 11, \ldots) = \omega+\omega+\omega = \omega\cdot 3$
tipo $(0, 4, 8, 12, \ldots 1, 5, 9, 13, \ldots 2, 6, 10, 14, \ldots 3, 7, 11, 15, \ldots) = \omega\cdot 4$
tipo $(3, 6, 9, 12, \ldots 4, 7, 10, 13, \ldots 5, 8, 11, 14, \ldots 0, 1, 2) = \omega\cdot 3+3$

Tipos de orden de diversas ordenaciones de los números enteros:

tipo $(\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots) = \omega^*+\omega = \zeta$
tipo $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots) = \omega$
tipo $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots -1, -2, -3, -4, \ldots) = \omega+\omega = \omega\cdot 2$
tipo $(1, 2, 3, 4, \ldots -1, -2, -3, -4, \ldots 0) = \omega+\omega+1 = \omega\cdot 2+1$

Un **buen orden** es un orden lineal $(A, <)$ tal que cada subconjunto suyo no vacío posee un mínimo elemento (es decir, si $B\neq\varnothing$ y $B\subseteq A$, entonces hay un $m\in B$, tal que, para cada $x\in B$, $m\leq x$). Los números **ordinales** son los tipos de orden de los buenos órdenes. Los números ordinales se suceden indefinidamente, obteniéndose ordinales cada vez mayores, sin que este proceso se acabe nunca. Después de los ordinales finitos (que coinciden con los números naturales: 0, 1, 2, 3, ...), un salto mortal nos permite pasar a ω, el primer ordinal infinito. Después de ω viene $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, etc., hasta llegar a $\omega+\omega = \omega\cdot 2$, al que sigue $(\omega\cdot 2)+1$, $(\omega\cdot 2)+2$, etc., hasta llegar a $(\omega\cdot 2)+\omega = \omega\cdot 3$, y así sucesivamente $\omega\cdot 4$, $\omega\cdot 5$, ... hasta llegar a $\omega\cdot\omega = \omega^2$. A ω^2 siguen ω^2+1, ω^2+2, ... hasta $\omega^2+\omega$, ... $\omega^2+\omega^2 = \omega^2\cdot 2$, ... hasta $\omega^2\cdot\omega = \omega^3$. El proceso de generación de ordinales no se acaba nunca: ω^3+1, ω^3+2, etc., y así sucesivamente: ω^4, ω^5, ω^6, ... hasta llegar a ω^ω, y luego ω^ω, ω^{ω^ω}, etc.

Consideremos la función sobre los números naturales b que al 0 le asigna $b(0) = \omega$ y a $n+1$ le asigna $b(n+1) = \omega^{b(n)}$. Por tanto,

$$b(0) = \omega$$
$$b(1) = \omega^\omega$$
$$b(2) = \omega^{\omega^\omega}$$

etc., hasta llegar (de un salto) al límite

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}}}}$$

es decir, a ω elevado a la potencia de ω un número ω de veces. A este número ordinal lo llamamos ε_0. Para cualquier función f, un punto fijo de f es un x del dominio de f tal que $f(x)=x$. ε_0 es el primer punto fijo de la función ordinal $f(\alpha)=\omega^\alpha$. Para cualquier ordinal sucesor $\alpha+1$, $\varepsilon_{\alpha+1}$ = el mínimo punto fijo de $f(\alpha)=\omega^\alpha$ mayor que ε_α. Para cualquier ordinal límite λ, $\varepsilon_\lambda=\bigcup_{\delta<\lambda}\varepsilon_\delta$. Así quedan definidos recursivamente los números ε, que ya Cantor había mencionado en una carta a Goldscheider de 1886, donde los llamaba 'gigantes'. Constituyen el tema del apartado final de la última obra matemática de Cantor (los *Beiträge*) y son el punto de partida de la teoría de las funciones normales, desarrollada porteriormente por Hessenberg y Hausdorff.

Las antinomias

En 1897, Burali-Forti publicó una contradicción obtenida en la teoría de conjuntos respecto a los ordinales: $\Omega+1>\Omega$ y $\Omega+1\leq\Omega$, donde Ω es el número ordinal del conjunto de todos los números ordinales. Ni Cantor, ni Frege ni Dedekind reaccionaron al resultado de Burali-Forti.

Cantor ya conocía estos problemas. En una carta a Hilbert de 1897 menciona la antinomia del conjunto de todos los alefs, si se considera como una totalidad: «La totalidad de los alefs no puede considerarse como un conjunto bien definido y terminado. Si lo fuera, le seguiría un cierto alef mayor, que, por tanto, a la vez pertenecería (como elemento) a esta totalidad y no le pertenecería. ... A las totalidades que no pueden considerarse como conjuntos (como, por ejemplo, la de los alefs, según hemos mostrado antes) las he llamado hace ya muchos años totalidades 'absolutamente infinitas' y las he distinguido tajante-

mente de los conjuntos transfinitos». Cantor era, pues, consciente del carácter inconsistente o antinómico del sistema de todos los números cardinales o del de todos los ordinales. De todos modos, parece que hubo una cierta evolución en su pensamiento sobre lo absolutamente infinito, rastreada por Ignacio Jané[21], que sitúa hacia 1896 el paso de una concepción de lo absolutamente infinito como actualmente existente a otra posterior, en la que ya no existe actualmente, sino que es esencialmente potencial.

En una nota a la quinta parte de *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (de 1883), y en relación con la serie de los ordinales, Cantor comenta: «No me cabe ninguna duda de que de este modo nunca llegaremos a una frontera insuperable, y ni siquiera llegaremos a una aprehensión aproximada de lo absoluto. Lo absoluto puede reconocerse, pero no conocerse, ni siquiera aproximadamente. ... Me parece que la sucesión absolutamente infinita de los números [ordinales] es en cierto modo un símbolo adecuado de lo absoluto». Lo absoluto es la infinitud de Dios, siguiendo ideas de Leibniz y Spinoza. Al inicio de su *Ethica*, Spinoza define a Dios como lo absolutamente infinito: *Per Deum intelligo ens absolute infinitum*. La secuencia de los ordinales, como símbolo de lo absoluto, no es un objeto matemático susceptible de ser objeto de operaciones matemáticas, so pena de caer en contradicción. Como escribe Cantor en una carta a Dedekind de 1899: «Una multiplicidad puede ser de tal naturaleza, que la suposición de que todos sus elementos estén conjuntados [*die Annahme eines 'Zusammenseins' aller ihrer Elemente*] conduce a una contradicción, de modo que es imposible concebir dicha multiplicidad como una unidad, como una cosa terminada. A tales multiplicidades las llamo multiplicidades absolutamente infinitas o inconsistentes. ... Cuando, por el contrario, la totalidad de los elementos de una multiplicidad pueden ser pensados como conjuntados sin contradicción, de tal modo que pueden ser pensados como reunidos en *una* cosa, la llamo multiplicidad consistente o conjunto». Como ejemplos de multiplici-

[21] Ignacio Jané, «The role of the absolute infinite in Cantor's conception of set», *Erkenntnis*, 42 (1995): 375-402.

dades inconsistentes pone Cantor la de todos los alefs, la de todos los ordinales y la de todas las clases concebibles de conjuntos no biyectables. Esta distinción cantoriana entre multiplicidades inconsistentes y consistentes resurgirá en los años veinte de forma más clara y rigurosa de la mano de von Neumann como distinción entre clases propias (o últimas) y conjuntos.

Cantor era consciente de los peligros de inconsistencia que acechaban a su teoría. ¿No podría ser, por ejemplo, que ya algunos de los alefs fuesen multiplicidades inconsistentes? Cantor responde que la misma duda surge también respecto a lo finito. Como dice en otra carta a Dedekind de 1899, «incluso para las multiplicidades finitas no podemos probar su consistencia. El hecho de la consistencia de las multiplicidades finitas es una verdad simple pero indemostrable, es el *axioma* de la aritmética. E igualmente la consistencia de las multiplicidades a las que asigno los alefs como números cardinales constituye el axioma de la aritmética transfinita». Cantor no estaba inquieto por las antinomias, pues su concepción platónica y teológica de la matemática le aseguraba su realidad inconmovible, como reflejo de las ideas divinas, aunque nuestro conocimiento de las mismas sea necesariamente limitado. Lo transfinito, objeto de la matemática, no es sino un pálido reflejo de lo absolutamente infinito, que está en Dios y es Dios, y no es objeto de la matemática.

En 1902, Russell descubrió su paradoja y se la comunicó por carta a Frege, que añadió un epílogo desolado al segundo tomo de sus *Grundgesetze*, en el que señala que también el sistema de Dedekind queda tocado. Ya hemos visto que en 1899 Cantor hizo notar por carta a Dedekind el problema de las 'multiplicidades inconsistentes' (*inkonsistente Vielheiten*) y la distinción entre multiplicidades determinadas o consistentes, que son inofensivas, y multiplicidades absolutamente infinitas o inconsistentes, que implican contradicciones. En 1903, Dedekind, preocupado, no permitió que se reeditase su libro sobre los números, que estaba agotado, «pues entre tanto han surgido dudas acerca de la seguridad de fundamentos importantes de mi concepción». Solo en 1911 permitió una nueva edición.

ÉPOCA DE VEJEZ

Tras la publicación de la segunda parte de los *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* en 1897, Cantor ya no volvió a publicar más trabajos matemáticos. A pesar de que en 1899 escribió a Hilbert que tenía la tercera parte de los *Beiträge* casi terminada y solo a la espera del visto bueno de Dedekind, y que la anunció varias veces, de hecho nunca llegó a publicarla. Todavía en 1912 le anunciaba a Hilbert varios trabajos para los *Annalen*, que nunca llegó a escribir.

Aunque ya no participaba activamente en el desarrollo de la teoría de conjuntos, seguía atentamente el trabajo de los demás. En 1904 asistió al Congreso Internacional de Matemáticos de Heidelberg, donde tuvo el disgusto de presenciar la conferencia de Julius König, en la que este famoso matemático de Budapest pretendía haber demostrado que la cardinalidad del continuo no es uno de los alefs, con lo cual gran parte de la teoría cantoriana se vendría abajo. De hecho, König estaba equivocado y había usado una versión incorrecta del teorema de Bernstein, como mostró Zermelo. Precisamente ese mismo año 1904 Zermelo probó el teorema del buen orden (que todo conjunto puede ser bien ordenado), usando para ello por primera vez de un modo explícito el principio o axioma de elección. Ello fue un gran triunfo para la teoría cantoriana. Cada conjunto podía ser bien ordenado, de modo que cada cardinal es un alef y dos cardinales cualesquiera son comparables. La clasificación de todos los cuerpos por Steinitz fue también celebrada como otro triunfo de la teoría de conjuntos.

Las antinomias y el axioma de elección fueron objeto de mucha controversia. Sin embargo, la teoría de conjuntos se fue abriendo camino de un modo imparable. Una nueva generación de matemáticos ilustres, como Hurwitz, Hadamard, Minkowski y Hilbert, usaban la teoría de conjuntos para desarrollar nuevas disciplinas, como la teoría de funciones reales, la topología o el análisis funcional. Los matemáticos franceses, como Borel, Baire, Fréchet y Lebesgue, aplicaban la teoría de conjuntos al estudio de las funciones reales. En 1895, Minkowski

escribía a Hilbert: «De nuevo me he dado cuenta de que Cantor es uno de los más geniales matemáticos vivientes. Su definición puramente abstracta de la cardinalidad de los puntos de un segmento con ayuda de los llamados números transfinitos es verdaderamente admirable»[22]. Ya vimos que la intervención de Hurwitz en la reunión constitutiva de la Unión Internacional de Matemáticos, celebrada en Zürich en 1897, marcó un hito en la aceptación de la teoría de conjuntos por la comunidad matemática mundial. Su clasificación de las funciones analíticas unívocas según la cardinalidad del conjunto de sus puntos singulares representaba un triunfo de la teoría cantoriana. En 1900 aparecía, por encargo de la Unión Alemana de Matemáticos, un informe de 250 páginas, escrito por Schoenflies, sobre los desarrollos recientes en la teoría de conjuntos de puntos. El I Congreso Internacional de Matemáticos se celebró en París en 1900, y su punto culminante fue la conferencia de David Hilbert, proponiendo sus 23 famosos problemas a los matemáticos de todo el mundo para su solución en el siglo XX. El primer problema de la lista era el del continuo de Cantor. En 1901, Hausdorff en la Universidad de Leipzig y Zermelo en la de Göttingen dieron los primeros cursos regulares de teoría de conjuntos. En 1906 aparecieron los primeros libros de texto en inglés, por Henry y Young, y en alemán, por Hessenberg. En 1909, el matemático polaco Sierpinski organizó su primer seminario conjuntista y en 1912 publicó su primer compendio, sentando así las bases para el florecimiento de la escuela polaca de teoría de conjuntos en las dos décadas siguientes. En 1914, Hausdorff publicó su magnífico tratado de teoría de conjuntos, que la popularizó entre los matemáticos alemanes. Las ideas conjuntistas y la concepción de la matemática como la ciencia de las estructuras abstractas fue abriéndose paso y ganando general aceptación, como muestra la constitución del grupo Bourbaki de matemáticos franceses a finales de los años treinta, que desarrollaron este programa al extremo.

En su vejez, Cantor fue objeto de muchos honores y distinciones, provenientes, por ejemplo, de la London Mathematical Society, de la

[22] En H. Minkowski, *Briefe an David Hilbert* (Berlín, Springer-Verlag, 1973), pág. 68.

Universidad de Oslo y de la Royal Society. Sin embargo, nunca fue admitido en la Academia de Berlín, dominada por sus enemigos.

En 1899, Cantor mostró signos de gran inestabilidad mental, y tuvo que ser hospitalizado. La universidad le concedió permiso por baja para no dar clases. En noviembre, Cantor escribió una extraña carta al Ministerio de Cultura de Prusia, manifestando su decidido propósito de abandonar la universidad, y pidiendo un puesto como bibliotecario o como diplomático. Entre sus méritos aducía sus contribuciones a la polémica sobre Shakespeare y Bacon, en el curso de la cual habría hecho descubrimientos sobre el primer rey de Inglaterra, «que con seguridad aterrorizarán al gobierno inglés cuando sean publicados». Daba al Ministerio un plazo perentorio de sólo dos días para contestarle y amenazaba con ofrecer sus servicios diplomáticos al zar Nicolás II de Rusia. Ni que decir tiene que el Ministerio no contestó y Cantor no se hizo bibliotecario ni diplomático. Ese mismo año falleció su hermano Constantin, y el 16 de diciembre, mientras él daba una conferencia en Leipzig sobre Shakespeare y Bacon, su querido hijo menor Rudolf murió repentinamente, cuando estaba a punto de cumplir trece años, sumiendo a Cantor en profundo dolor. Durante los tres años siguientes logró evitar las recaídas, pero en invierno de 1902-1903 de nuevo tuvo que ser hospitalizado y liberado de sus obligaciones docentes.

En 1904 asistió al Congreso Internacional de Matemáticos en Heidelberg, acompañado de sus dos hijas, y tuvo que sufrir la humillación de la presentación del presunto resultado de Julius König, que arruinaba su teoría de los cardinales. Aunque poco después se comprobó que su resultado era erróneo, Cantor quedó muy afectado. El 17 de septiembre de 1904 fue ingresado de nuevo en la *Nervenklinik* de Halle, en la que permanecería hasta el 1 de marzo de 1905. Tras abandonar el hospital, declaró que allí dentro había tenido «una inspiración desde lo alto, que me sugirió un estudio renovado de la Biblia con una mirada abierta y libre de prejuicios». Resultado de esa inspiración fue su panfleto *Ex Oriente Lux*, cuya principal tesis era que Cristo había sido el hijo natural de José de Arimatea.

No era la primera vez que Cantor pretendía recibir inspiraciones divinas. Incluso en su trabajo puramente matemático, su inconmovible

seguridad en la existencia de los conjuntos y números transfinitos y en la verdad de su teoría se basaba en que ambos estaban anclados en la mente divina, el infinito absoluto. Como escribía en una carta a Heman en 1888: «Mi teoría es tan firme como una roca. Cada flecha dirigida contra ella se volverá contra el arquero que la haya disparado. ¿Cómo lo sé? Porque lo he estudiado desde todos los ángulos durante muchos años, porque he examinado todas las objeciones presentadas contra los números infinitos y, sobre todo, porque he seguido sus raíces, por así decir, hasta la causa primera e infalible de todas las cosas creadas».

El resto de su vida fue un continuo entrar y salir de la clínica psiquiátrica. Entre 1905 y 1909, Cantor estuvo de baja por enfermedad la mayor parte del tiempo y no dio clases en los semestres de invierno. En 1910 dio un curso sobre mecánica analítica. De 1911 a 1913 volvió a estar de baja por enfermedad. Se jubiló en 1913, aunque seguía yendo por la Facultad y participando en algunas sesiones.

Su setenta cumpleaños, en 1915, fue la ocasión de un homenaje en su casa de Halle. Primero se había previsto un homenaje internacional, pero el estallido de la Primera Guerra Mundial lo impidió. De todos modos, la ceremonia en su casa, con la inauguración de un busto suyo ofrecido por los colegas, el homenaje de la Unión Alemana de Matemáticos que él había fundado y la presencia personal del famoso David Hilbert, lo llenó de emoción y alegría. Había previsto dar un curso privado sobre lógica aristotélica en 1917, pero en verano de 1917 Cantor volvió a sufrir una recaída grave de su enfermedad nerviosa. El 11 de mayo fue ingresado en la clínica nerviosa de la Universidad de Halle, de la que ya no saldría. Cantor escribía cartas continuas a su familia, pidiendo que lo sacasen de allí, pero nada ocurría. La Guerra Mundial tocaba a su fin, los alimentos escaseaban, también en la clínica, y Cantor estaba cada vez más demacrado. Murió allí el 6 de enero de 1918, al parecer de un ataque al corazón.

En una carta de condolencia dirigida a Vally Cantor, el matemático Edmund Landau escribía: «Con profundo dolor me entero de la muerte de su marido. La comunidad matemática entera participa de su due-

lo. Él ha sido uno de los matemáticos más grandes y más geniales de todos los países y de todos los tiempos».

Aunque no hay evidencia de que Cantor haya tenido ascendencia judía, su teoría de conjuntos fue considerada como matemática judía por los nazis, que también retiraron el busto de mármol de Cantor situado a la entrada de la Universidad de Halle.

3
BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

La revolución industrial había empezado en el siglo XVIII en Gran Bretaña, transformándola en el país más rico del mundo. Tras la derrota de Napoleón en la batalla de Waterloo y la consolidación de su expansión colonial, Gran Bretaña era también la primera potencia mundial. En 1837 accedía al trono una jovencita de dieciocho años, la reina Victoria, cuyo larguísimo reinado de sesenta y tres años (1837-1901) marcaría el apogeo del Imperio británico. En 1876, Disraeli proclamó a la reina Victoria emperatriz de la India. Sin embargo, la estructura política y social de Inglaterra, que no se había modernizado al mismo ritmo que la economía, parecía desfasada y anacrónica. A pincipios del siglo XIX todavía se castigaba con pena de muerte el robo de un conejo y el Parlamento estaba copado por los grandes terratenientes y la aristocracia rural, careciendo de representación los distritos más poblados y dinámicos.

Casi toda la historia política del siglo XIX británico es la crónica de las sucesivas reformas tendientes a liberalizar, democratizar y humanizar el sistema. Los políticos se dividían en *whigs*, partidarios de las reformas, y *tories*, opuestos a ellas. En 1830, los *whigs* llegaron al gobierno y consiguieron que en 1832 el Parlamento aprobara un acta de reforma electoral que extendía el derecho de voto a casi todos los hombres de clase media. Al año siguiente prohibieron el trabajo de los niños meno-

res de nueve años. Y limitaron el tipo de delitos castigados con la pena de muerte. Lord John Russell fue uno de los principales propulsores de dichas reformas. Los terratenientes británicos defendían sus intereses mediante leyes que prohibían o encarecían la importación de cereales del extranjero. En 1845 y 1846 se produjo el colapso de la cosecha de patatas en Irlanda y las cosechas inglesas de trigo fueron pésimas. La gente pasaba hambre y el único remedio —según los economistas— consistía en liberalizar el comercio de los cereales, permitiendo la libre importación de grano barato. El primer ministro Peel, aunque *tory*, aceptó el consejo y abolió las leyes que frenaban la importación de cereales. Aunque el país prosperó considerablemente con esta liberalización comercial, los terratenientes no se lo perdonaron a Peel, provocando una gran crisis política. El partido *tory* se escindió en dos: los más reaccionarios y opuestos al libre comercio formaron el Partido Conservador. Los más progresistas y partidarios del libre comercio se unieron a los *whigs* y formaron el Partido Liberal. Entre 1868 y 1885 los dos famosos políticos Gladstone (liberal) y Disraeli (conservador) se alternaron en el gobierno. Gladstone concedió el voto a casi todos los hombres, introdujo el voto secreto, implantó la escolarización obligatoria hasta los trece años y trató de conceder autonomía a los irlandeses.

Conforme la industrialización había ido extendiéndose a otros países, habían surgido competidores a la industria británica, entre los que destacaban las empresas alemanas. La rivalidad entre las potencias europeas condujo a una enorme acumulación de armamentos, ejércitos y marinas, que acabaron siendo empleados en la Primera Guerra Mundial (1914-1918), apoyada entusiásticamente por la opinión pública. A pesar de que la guerra no llegó a la Gran Bretaña, sus tropas sufrieron unas 750.000 bajas. Los pocos pacifistas, como Bertrand Russell, no estaban bien vistos.

INFANCIA Y ADOLESCENCIA

Bertrand Russell nació el 18 de mayo de 1872 en el seno de una familia aristocrática de tradición política liberal y progresista. Su abuelo

paterno, Lord John Russell, había sido dos veces primer ministro y jefe del Partido Liberal, habiendo introducido importantes reformas sociales y políticas. Toda la familia Russell participaba de esa tradición *whig*, liberal y progresista, con la que también siempre se identificaría Bertrand. La madre de Bertrand murió en 1874, y su padre dos años después. Ambos eran ateos y racionalistas, amigos y discípulos de John Stuart Mill, y dispusieron que sus hijos fueran educados por tutores de sus mismas ideas. Sin embargo esta última voluntad suya no fue respetada. La educación de Bertrand y su hermano Frank fue confiada por el juzgado a su abuela paterna, Lady John Russell, mujer religiosa y puritana, aunque de ideas políticas avanzadas.

La infancia y adolescencia de Bertrand Russell fueron muy solitarias. Al contrario que su hermano Frank, Bertrand no fue enviado a la escuela, sino que fue educado en casa de su abuela por gobernantas alemanas y suizas y por preceptores particulares, lo que le permitió dominar desde el principio el alemán, el francés y el italiano, además del inglés. Pronto abandonó las ideas religiosas de la abuela, aunque no tenía con quien hablar de sus dudas y problemas. Escribía sus reflexiones en un diario con letras griegas, a fin de evitar inspecciones indiscretas. Por otro lado, el ambiente serio y exigente de la casa de la abuela y la falta de contacto con otros infantes de su edad contribuían a su melancolía. De todos modos, su infancia no fue del todo triste. Entre sus alegrías destaca su primer contacto con las matemáticas, a las que más tarde se dedicaría con éxito y ardor.

«A la edad de once años —escribe Russell en su autobiografía— empecé a estudiar geometría, teniendo por preceptor a mi hermano. Fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. Jamás había imaginado que pudiera haber algo tan delicioso en el mundo ... Desde aquel momento hasta que Whitehead y yo concluimos *Principia Mathematica,* cuando yo tenía treinta y ocho años, las matemáticas acapararon mi principal interés y constituyeron mi principal fuente de felicidad. Como toda felicidad, sin embargo, no era completa. Se me había dicho que Euclides demostraba las cosas, y me sentí profundamente decepcionado al ver que partía de axiomas. Al principio me negué a aceptarlos, a menos que mi hermano

me ofreciera razones para hacerlo, pero él me dijo: "Si no los aceptas, no podemos seguir adelante", y como yo quería continuar, los admití de mala gana. La duda que me asaltó en aquel momento respecto a las premisas de las matemáticas ya no me abandonó y determinó el curso de mi labor subsiguiente.» En efecto, esa negativa del niño Russell a aceptar los axiomas como algo indemostrado se convertiría más adelante en el empeño de demostrar también los axiomas matemáticos a partir de la mera lógica.

Puesto que las matemáticas eran su principal interés y la Universidad de Cambridge era la mejor en matemáticas, se decidió que trataría de ingresar en ella. En casa de su abuela, Bertrand había recibido una buena formación particular en lenguas vivas y ciencias, pero para poder ingresar en Cambridge tenía que perfeccionar su latín y su griego. Por ello a los diecisiete años se trasladó a Old Southgate para preparar los exámenes de ingreso en la Universidad de Cambridge en una escuela preparatoria (*crammer*) especializada en ingresos en la Academia Militar. Allí encontró compañeros, pero no los que esperaba, pues resultaron ser demasiado rudos, violentos y groseros para el carácter tímido, delicado y sutil del joven Bertrand. «Me sentía profundamente desdichado —escribe Russell—. Había un sendero que llevaba a New Southgate a través de los campos, y solía ir allí solo para contemplar la puesta de sol y pensar en el suicidio. No me suicidé, sin embargo, porque deseaba saber más matemáticas.»

Juventud

Algo más tarde, en 1890, ingresó Russell en el Trinity College de la Universidad de Cambridge. A partir de ese momento, todo cambió y sus años universitarios fueron felices. «Cambridge me abrió un nuevo mundo de delicia infinita.» Alfred N. Whitehead, que lo había examinado de ingreso, se percató de su gran inteligencia y lo puso en contacto con los alumnos más brillantes. Pronto fue admitido en el círculo exclusivo de «los Apóstoles», un grupo de estudiantes especialmente inteligentes y curiosos, que se reunían todos los sábados por la tarde

en la habitación de uno de ellos a discutir con rigor y sin prejuicios sobre todo lo divino y lo humano, discusión que continuaba el domingo después de desayunar en un largo paseo que ocupaba toda la jornada. También George E. Moore y John McTaggart formaban parte del grupo. En aquella época la universidad inglesa no estaba todavía sometida a las presiones profesionales que hoy la dominan, y los estudiantes más despiertos, además de estudiar sus especialidades respectivas (por ejemplo, matemáticas), podían permitirse el lujo de leer y discutir ampliamente sobre filosofía, política, religión, arte, etc. En realidad esos estudiantes que se dedicaban a las matemáticas por la mañana y discutían temas filosóficos por la tarde realizaban el ideal platónico de formación intelectual. Sus discusiones casi constituían —en palabras de Whitehead— un diálogo platónico diario. Russell se graduó en matemáticas en 1893 y en filosofía en 1894.

La adolescencia de Bertrand había transcurrido en la soledad y sin contacto ninguno con el otro sexo. Cuando finalmente abandonó la casa de su abuela, a los diecisiete años, conoció a una familia de cuáqueros nortamericanos, procedentes de Filadelfia, y se enamoró ardientemente de la hija menor, Alys Pearsall Smith, que desde el principio lo fascinó con su belleza e inteligencia. La abuela de Bertrand y su aristocrático entorno no se tomaron muy en serio el devaneo de su nieto con la hija de un industrial de Filadelfia. Cuando en 1893 Bertrand llegó a la mayoría de edad y tuvo acceso a un legado de 20.000 libras esterlinas procedente de su padre, se apresuró a pedir la mano de Alys. La aristocrática abuela, alarmada, trató de impedir la boda de su brillante nieto con una cuáquera americana, que además era cinco años mayor que él. Sólo obtuvo de Bertrand la promesa de que no vería a Alys durante tres meses. Lady John Russell consiguió que durante esos meses Bertrand fuera destinado a la Embajada Británica en París, esperando que se le pasara la idea, pero no fue así. En cuanto regresó a Inglaterra, Bertrand se casó con Alys en una ceremonia cuáquera en Londres en diciembre de 1894. Alys sería la primera de sus cuatro esposas.

La oposición decidida de Lady John Russell a la boda de su nieto tuvo como consecuencia lateral que éste se enterase del historial de

locura en su familia. Su abuela y el médico familiar trataron de convencerlo de que no se casara y como último argumento adujeron el peligro voluntariamente exagerado de que engendrara hijos locos, revelándole una serie de episodios familiares hasta entonces silenciados en su presencia. Resultaba que su tío Willy había perdido la memoria y el sentido, había estrangulado a un vagabundo y estaba encerrado en un manicomio. Su tía Agatha tenía alucinaciones y había acusado a su novio ante la policía de tratar de asesinar a Lord Clanricarde, por lo que se había quedado sin novio. Incluso el propio padre de Bertrand, Lord John Russell Amberly, había sufrido episodios de epilepsia. Bertrand quedó profundamente marcado por estas revelaciones. Durante el resto de su vida la imagen de su tío estrangulando al vagabundo retornaba una y otra vez a su imaginación, identificándose mentalmente unas veces con el asesino y otras con la víctima. En diversas ocasiones posteriores, sobre todo en momentos de desengaños amorosos o rupturas con sus amantes, Russell alcanzaba tales paroxismos de desesperación que creía que estaba a punto de volverse loco él también, lo cual no hacía más que aumentar *aún más su angustia* [1].

Poco después de su boda, a comienzos de 1895, Bertrand Russell y su mujer Alys emprendieron un largo viaje por Europa continental, incluyendo tres meses de estancia en Berlín, donde estudió economía, y excursiones por Italia. En verano los Russell se instalaron en una pequeña casa en Fernhurst, en el condado de Sussex, en el sur de Inglaterra, donde residirían en los años siguientes. Allí escribió Russell su disertación sobre los fundamentos de la geometría, por la que en octubre de 1895 le fue concedida una *fellowship* (es decir, una beca honoraria de seis años) del Trinity College de la Universidad de Cambridge. De todos modos, Russell, como la mayoría de sus colegas, vivía de sus propias rentas, modestas, pero suficientes.

En otoño, Bertrand y Alys volvieron a Berlín, donde estudiaron la teoría y práctica de los socialdemócratas alemanes. De regreso a Ingla-

[1] Para este y otros aspectos de la vida íntima y personal de Bertrand Russell, la mejor fuente de información es la exhaustiva biografía de Ray Monk, *Bertrand Russell: The Spirit of Solitude* (Londres, Jonathan Cape, 1996), que, sin embargo (y de momento) solo abarca su vida hasta el año 1920.

terra, Russell presentó sus conclusiones en una serie de conferencias en la recién fundada London School of Economics, que fueron publicadas el año siguiente, 1896, como *German Social Democracy* (La socialdemocracia alemana), el primero de sus libros. Russell era amigo de los Fabianos (intelectuales socialistas moderados ingleses, predecesores del Partido Laborista) —especialmente de Sidney y Beatrice Webb— y miraba con simpatía y comprensión el movimiento obrero alemán, aunque no dejaba de criticar el sesgo apriorístico y dogmático de su ideología marxista y la poca eficacia política de su postura de lucha de clases, que más bien espantaba a los liberales y los llevaba a preferir la derecha conservadora a la amenazante revolución. Al mismo tiempo, denunciaba el carácter autoritario del sistema político alemán, la persecución de la oposición política y las limitaciones a la libertad de expresión. El análisis y las predicciones de Russell se vieron confirmadas por la posterior evolución política de Alemania.

Fundamentos de la geometría

En 1897 apareció el segundo libro de Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry* (Ensayo sobre los fundamentos de la geometría), basado en su disertación. Russell era ya un buen conocedor de la geometría del siglo XIX, pero seguía enfocando su estudio desde un punto de vista filosófico neokantiano (aunque adaptando la filosofía de Kant al nuevo dato de las geometrías no euclídeas) e incluso neohegeliano, admitiendo contradicciones. Su lógica era todavía la lógica idealista de Bradley, con su insistencia en que todas las relaciones son internas, es decir, en el fondo propiedades.

Kant había pretendido que la geometría euclídea tiene una validez a priori, basada en la forma a priori que el aparato cognitivo humano necesariamente imprime en las percepciones. Russell seguía siendo parcialmente kantiano. Se preguntaba —como Kant— por cuál es el contenido a priori de la geometría, que la mente necesariamente impone a la realidad, pero concluía que ese contenido a priori se limita a la geometría proyectiva. En efecto, los matemáticos del siglo XIX ha-

bían desarrollado diversas geometrías no euclídeas como alternativas a la euclídea, pero todas ellas eran casos especiales de la geometría proyectiva. La geometría proyectiva ignora las distancias y los tamaños, y trata solo de las características cualitativas del espacio, comunes y previas a las diversas maneras de metrizarlo o cuantificarlo, representadas por las geometrías euclídea, hiperbólica, esférica y elíptica. Las propiedades espaciales a priori que la mente necesariamente impone a las percepciones serían solo las de la geometría proyectiva. Russell trataba también de la noción de variedad (*manifold*) introducida por Riemann, que incluye espacios con curvatura variable de un lugar a otro. Russell pensaba que tales espacios son imposibles lógicamente. Las geometrías de espacios homogéneos (de curvatura constante), euclídeas y no euclídeas, y de cualquier número finito de dimensiones, son a priori posibles, aunque Russell pensaba que el espacio físico de hecho es euclídeo y tridimensional. Así como Kant no había previsto el desarrollo de las geometrías no euclídeas, Russell tampoco previó el desarrollo (veinte años más tarde) de la teoría general de la relatividad de Einstein, basada en un espacio riemanniano de curvatura variable, en función de la distribución de la materia. En definitiva, el espacio físico de la relatividad general es no-euclídeo, cuatridimensional y no homogéneo, sino de curvatura variable, propiedades todas ellas rechazadas por Russell (las dos primeras como empíricamente falsas; la última como lógicamente absurda). Así el kantismo residual de Russell quedaría refutado por la evolución misma de la ciencia, como él mismo sería el primero en reconocer, escribiendo más tarde: «La geometría de la teoría general de la relatividad es la geometría que yo había considerado imposible. La teoría de los tensores, en que se basaba Einstein, me habría resultado útil, pero no la conocí hasta que él la utilizó».

Ese doble interés por la política y por la ciencia —sobre todo la matemática— que se manifiesta ya en sus dos primeros libros (sobre la socialdemocracia alemana y sobre los fundamentos de la geometría) lo mantendría Russell a lo largo de toda su vida.

En otoño de 1896 los Russell visitaron Estados Unidos. Bertrand impartió conferencias sobre los fundamentos de la geometría en el

Bryn Mawr College, donde había estudiado Alys, y en la Universidad John Hopkins de Baltimore.

Regresados a Inglaterra, se instalaron en otra casa de campo cerca de Fernhurst, en Sussex. Allí se dedicaría Russell durante los años siguientes a solucionar las dudas sobre la filosofía de la matemática que le preocupaban desde su infancia. Al mismo tiempo empezó a cuestionar sus anteriores convicciones idealistas.

Rebelión contra el idealismo

Cuando Russell inició sus estudios en Cambridge, el idealismo dominaba la filosofía europea. Russell comenzó aceptando la filosofía vigente en Gran Bretaña en aquella época, una versión del idealismo debida a Bradley y McTaggart. Su aceptación del idealismo se fue fraguando durante sus tres primeros años en Cambridge, en que estudiaba sobre todo matemáticas, y se hizo más decidida en 1893, en que se dedicó únicamente al estudio de la filosofía, bajo la influencia sobre todo de su profesor G. Stout y de su amigo y compañero McTaggart. Stout pensaba que el reciente libro de Bradley (un idealista de Oxford), *Appearance and Reality* (1893), había alcanzado todo lo que humanamente podía lograrse en ontología. McTaggart brillaba con su famoso argumento sobre la irrealidad del tiempo, e influyó en Russell más que nadie en aquel momento.

Según el idealismo absoluto, en realidad hay una sola cosa, que lo es todo y que es la conciencia. Y los únicos enunciados realmente verdaderos son los que se refieren al todo (o absoluto, o conciencia absoluta). A esta peregrina doctrina se llega por la llamada teoría de las relaciones internas. En efecto, la lógica tradicional no conocía más atributos que los predicados monádicos (que designan propiedades). Los relatores o predicados poliádicos ('... ama a ...', '... está situado entre ... y ...') habían sido ignorados por Aristóteles. Esta insuficiencia del análisis lógico conducía a la curiosa doctrina metafísica del idealismo absoluto. Puesto que en lógica se ignoraban los relatores, en ontología se negaban las relaciones reales o 'externas'. Las relaciones eran,

pues, concebidas como 'internas', como siendo en realidad propiedades de los objetos relacionados. Si un libro está encima de la mesa, entonces el estar encima de la mesa es una propiedad del libro, y la mesa forma parte de la naturaleza del libro. Pero el estar debajo del libro es, a su vez, una propiedad de la mesa y, por tanto, el libro forma parte de la naturaleza de la mesa. Y como cada cosa está relacionada de alguna manera con todas las demás, cada cosa forma parte de la naturaleza de las demás. En definitiva resulta que no hay *más* que una cosa, que es la totalidad o el absoluto. Por otro lado, *cualquier* cosa que consideremos está relacionada con nuestra conciencia que la considera, y forma parte —por la teoría de las 'relaciones *internas*'— de esta conciencia. No hay, pues, más que una cosa, y esa cosa es la conciencia. La conciencia es el absoluto. Además, *cualquier enunciado* particular (como que el libro que está encima de la mesa tiene cien páginas), al aislar artificialmente un hecho que en realidad está relacionado internamente con todas las cosas, presenta una visión deformada y parcial de la realidad, es falso o, a lo sumo, solo relativa y parcialmente verdadero. Para ser verdadero sin más, el enunciado habría de referirse a todas las cosas implicadas en el asunto, es decir, a todas las cosas, al todo o absoluto. Los únicos enunciados verdaderos son los enunciados sobre el absoluto.

Russell no acababa de estar satisfecho con esta teoría, que chocaba con lo que él gustaba en llamar su «robusto sentido de la realidad». Buscando solución a las dificultades que encontraba en Bradley, Russell acudió a la lectura directa de Hegel. El contacto con las obras del maestro del idealismo acabó de convencer a Russell de lo absurdo de la doctrina. «Durante 1898 ... leí la *Lógica* de Hegel, y pensé, como sigo pensando, que todo lo que dice sobre las matemáticas es un confuso sinsentido [*muddle-headed nonsense*]». Influido por su amigo y compañero George E. Moore, se rebeló contra la filosofía idealista. Moore «encontraba que la filosofía de Hegel era inaplicable a las mesas y a las sillas; yo encontraba que era inaplicable a las matemáticas; así que con su ayuda logré librarme de ella y volver al sentido común atemperado por la lógica matemática. ... Con la sensación de haber escapado de la prisión, nos volvimos a permitir pensar que la hierba es verde, y que el sol y las estrellas existirían incluso si nadie pensara en

ellas». Moore y Russell desarrollaron la teoría de las relaciones externas y establecieron las bases de su 'atomismo': en el mundo hay una multitud de cosas, distintas unas de otras y de la conciencia, aunque relacionadas entre sí por relaciones externas. Los enunciados particulares («el Sena pasa por París», «me he comprado un sombrero») pueden ser verdaderos (en el pleno sentido de la palabra) con completa independencia del resto del universo.

En un primer momento la euforia causada por el rechazo del encantamiento idealista llevó a Russell al extremo contrario, a aceptar como real e independiente todo lo que el idealismo había condenado como aparente: los objetos físicos observables, las entidades teóricas, los puntos espacio-temporales, los números, las proposiciones, etc. Pero esta etapa no había de durar mucho.

En 1899, John McTaggart, que debía impartir un curso sobre Leibniz, deseaba visitar a su familia en Nueva Zelanda, por lo que Russell accedió a ocupar su lugar y dar las clases sobre Leibniz. Sus conferencias fueron luego reunidas y publicadas en su tercer libro, *The Philosophy of Leibniz*, publicado en 1900. Russell ofrecía una interpretación nueva y original de la filosofía leibniziana, que sería pronto vindicada por la publicación de los manuscritos inéditos de Leibniz por Couturat (*Opuscules et fragments inédites de Leibniz*, 1903). Además, su ocupación con Leibniz ayudó a Russell a rechazar la filosofía de Bradley y el análisis lógico (común a Leibniz, Kant y Bradley) en que se basaba, un análisis que presuponía que todos los enunciados tienen la forma sujeto-predicado, lo cual no es el caso. Russell volvió a admitir la realidad de las relaciones, negada por Bradley, y el mundo exterior del sentido común y la ciencia, negado por los idealistas.

Según el idealismo hegeliano resulta imposible entender ninguna parte del todo sin comprender cuál es el papel que esa parte desempeña en el todo, cuáles son sus relaciones con el resto del todo, sin entender, previamente, el todo entero. El análisis sería, pues, imposible. Pero una vez rechazado el idealismo, el camino quedaba abierto para utilizar el análisis, pues resulta posible el conocimiento de hechos y relaciones particulares mientras todavía se ignora 'la totalidad'.

El Congreso Internacional de Filosofía de París

Si el rechazo del idealismo era la condición negativa de la viabilidad del método analítico, su condición positiva era el desarrollo de una lógica lo suficientemente precisa y compleja como para dar cuenta de la estructura de todos los enunciados que hayan de ser analizados y, en primer lugar, de todos los enunciados científicos. Dicha lógica surgiría de la imbricación de la incipiente teoría de relaciones de Russell con el simbolismo lógico de Peano, que Russell conoció en París en 1900.

«El año más importante de mi vida intelectual —escribe Russell— fue el año 1900, y el acontecimiento más importante de ese año fue mi visita al Congreso Internacional de Filosofía de París ... en el que quedé profundamente impresionado por el hecho de que, en todas las discusiones, las intervenciones de Peano y sus discípulos tenían una precisión de la que carecían todos los demás.» Durante el congreso, celebrado a primeros de agosto, Russell se puso en contacto con Peano, cuyo simbolismo dominó rápidamente. «A últimos de agosto —cuenta Russell— ya me había familiarizado por completo con toda la obra de su escuela. Empleé el mes de septiembre en extender sus métodos a la lógica de las relaciones... Fue una época de embriaguez intelectual. Mis sensaciones se asemejaban a las que se experimentan tras escalar una montaña en medio de la niebla cuando, al llegar a la cima, la niebla se disipa súbitamente y el panorama se hace visible en cuarenta millas a la redonda.»

Louis Couturat era el principal representante en Francia de la nueva filosofía científica europea, que prestaba una gran atención a los fundamentos de la lógica y las matemáticas. Recensionó con simpatía no exenta de polémica la obra de Russell sobre los Fundamentos de la Geometría, entablando así una relación epistolar y de amistad con él. Sus intereses se solapaban ampliamente, como se puso de manifiesto cuando ambos descubrieron con sorpresa que los dos estaban escribiendo a la vez sendos libros sobre Leibniz. La correspondencia era en francés, lengua que Russell dominaba. En junio de 1899, Russell había sido invitado por Couturat —uno de los organizadores— a intervenir

en el Congreso Internacional de Filosofía que debía celebrarse en París el año siguiente. El Congreso se celebró en agosto de 1900, y Russell presentó una ponencia (en francés) sobre la noción de orden y la posición absoluta en el espacio y el tiempo.

Bertrand Russell y Alys acudieron al Congreso Internacional de Filosofía de París acompañados por Alfred N. Whitehead y su mujer, Evelyne. Después de haber publicado *A Treatise on Universal Algebra with Applications* (Un tratado de álgebra universal con aplicaciones) en 1898, Whitehead había pasado de ser el maestro a ser el amigo más asiduo de Russell. Tanto era así, que al año siguiente los Russell se trasladaron a vivir con los Whitehead. Bertrand quedó muy afectado por la enfermedad (un amago de ataque cardiaco) y los sufrimientos de Evelyne, por quien experimentaba tiernos sentimientos. En verano de 1901 los Russell y los Whitehead pasaron las vacaciones juntos en Italia.

A principios de 1902, mientras estaban alojados en Mill House (la nueva casa de los Whitehead, cerca de Cambridge), donde residirían frecuentemente en los años siguientes, Bertrand se dio cuenta de que ya no amaba a Alys, y se lo confesó inmediatamente con su habitual y algo brutal franqueza. Desde entonces hasta su separación, nueve años más tarde, siguieron viviendo juntos pero en convivencia fría, tensa e infeliz. Russell se volcó en sus investigaciones matemáticas. Bertrand y Alys pasaron las Navidades de 1902 en *I Tatti*, la residencia toscana del crítico de arte Bernard Berenson, casado con Mary, la hermana de Alys. Russell, desesperado por la desaparición de su amor por su mujer, vagaba por las colinas cubiertas de cipreses de los alrededores. Resultado de sus reflexiones fue el intenso ensayo *A free man's worship* (La religión de un hombre libre).

Los principios de la matemática

Desde 1897, cuando estaba todavía bajo el influjo de la filosofía idealista, hasta finales de 1909, Russell estuvo embarcado en una investigación apasionada, exhaustiva y profunda de las bases y fundamentos de las matemáticas. Esta investigación tuvo dos etapas: una más infor-

mal y filosófica, que culminaría con la publicación de *The Principles of Mathematics* en 1903, y otra más formal y matemática, que acabaría con la publicación de los tres volúmenes de *Principia Mathematica* a partir de 1910.

Hacia 1897, Russell empezó a escribir el primero de una serie de esbozos y escritos preparatorios de *The Principles of Mathematics*, a saber, «An Analysis of Mathematical Reasoning» (Un análisis del razonamiento matemático), terminado en julio de 1898. En 1899 escribió «The Fundamental Ideas and Axioms of Mathematics» (Las ideas y axiomas fundamentales de las matemáticas), en el que ya daba vueltas a una paradoja del número de todos los números. En junio de 1900 completó Russell una primera versión de *The Principles of Mathematics*[2]. En diciembre completó la redacción de las partes III-VI de la obra definitiva. En junio de 1901 terminó la parte II. En mayo de 1902 terminó de escribir todo el texto principal. Durante el resto del año corrigió las pruebas de la obra, y le añadió sendos apéndices sobre Frege y sobre la idea de los tipos. En diciembre de 1902 entregó al editor el prefacio. Finalmente, *The Principles of Mathematics* fue publicada en mayo de 1903.

Russell tuvo noticia de la teoría de conjuntos de Cantor en 1896 a través de un libro de Hannequin que lo predispuso en su contra. Luego leyó directametne a Cantor, pero al principio no lo entendió bien y rechazó su teoría de los ordinales transfinitos. Couturat, por el contrario, aceptaba las tesis de Cantor. Poco a poco, Russell se fue convenciendo también de ellas, y la versión final de *The Principles of Mathematics* incorpora ya la teoría cantoriana de los ordinales y cardinales transfinitos. Ya vimos que Russell descubrió el simbolismo de Peano en París en 1900, y rápidamente lo aceptó, aunque luego fue descubriendo sus limitaciones. Cuando, en mayo de 1902, había acabado de escribir el texto principal de la obra, se puso a leer a otros lógicos (Boole,

[2] Publicada como *The Principles of Mathematics*, Draft of 1899-1900, en el tercer volumen de *The Collected Papers of Bertrand Russell*, titulado *Towards the «Principles of Mathematics»*, *1900-02*, editado por Gregory Moore, y publicado en 1993 por Routledge, Londres y Nueva York. Este volumen contiene también los otros trabajos preliminares aquí citados, que hasta 1993 habían permanecido inéditos.

De Morgan, Venn) para añadir algunas notas eruditas a pie de página. En junio de 1902 leyó por primera vez a Frege, y se dio cuenta de que Frege ya había adelantado muchas de las cosas que él creía haber descubierto, incluyendo la tesis misma del logicismo. Además, la lógica de Frege era mucho más sutil y precisa que la de Peano, aunque su simbolismo era bastante engorroso, por lo que Russell acabó adoptando una lógica parecida a la de Frege, pero expuesta en un simbolismo parecido al de Peano. «En matemáticas —escribe Russell en el prefacio—, mis deudas principales son, como resulta evidente, para con Georg Cantor y el profesor Peano. Si hubiera conocido con anterioridad los trabajos del profesor Frege, habría contraído una gran deuda con él, pero de hecho yo he llegado independientemente a muchos resultados que él ya había descubierto previamente.» Lo único que le dio tiempo a hacer antes de la publicación del libro fue añadir un apéndice sobre las teorías de Frege.

El logicismo

Una vez superada su etapa idealista, Russell rechazaba tanto la filosofía empirista de las matemáticas propuesta por John Stuart Mill, como la concepción apriorista de Immanuel Kant. Habiendo hallado insatistactorias esas dos concepciones de la validez de las matemáticas entonces conocidas, decidió desarrollar la suya propia.

La filosofía russelliana de la matemática, conocida como logicismo, se basa en la tesis de que la matemática es enteramente reducible a la lógica. Esta tesis se articula en dos partes: (1) todos los conceptos matemáticos son definibles a partir de conceptos puramente lógicos; y (2) todos los teoremas matemáticos son deducibles a partir de principios lógicos. El programa logicista consistía precisamente en llevar a cabo esa tarea.

Los matemáticos del siglo XIX —Weierstrass, Dedekind, etc.— habían llevado a cabo la llamada aritmetización del análisis, reduciendo los números complejos, reales y racionales a clases de números naturales. Por tanto, el primer paso del programa logicista tenía que consistir

en definir los números naturales en términos lógicos. Ya vimos que dos clases son biyectables si se puede establecer una biyección o correspondencia biunívoca entre sus elementos. Russell identificó el número de (elementos de) un conjunto con la clase de todas las clases biyectables con ese conjunto. Así, por ejemplo, el número de páginas de un libro sería la clase de todas las clases biyectables con el conjunto de sus páginas (si el libro tuviera 230 páginas, sería la clase de todas las clases con 230 elementos). En especial, el 2 sería la clase de todos los pares, el 3 la clase de todos los tríos, etc. Habiendo definido lo que es el número de una clase, se puede definir número natural, en general, como aquello que es número de alguna clase: x es un número natural si y solo si hay una clase y tal que x es el número de y. Esta definición no es circular, pues el concepto de *número de* está previamente definido con total independencia del concepto de número natural. Una teoría parecida ya había sido anteriormente expuesta por Frege, pero Russell solo descubrió sus obras después de haber llegado por sí mismo a ideas similares.

LAS PARADOJAS

En la primavera de 1901, Russell se puso a deducir las matemáticas a partir de la lógica. Estudiando la paradoja descubierta por Cantor, y referente a la cardinalidad (el número de elementos) de la clase universal, descubrió una contradicción mucho más simple y básica: la famosa 'paradoja de Russell'. Aunque al principio le pareció una mera curiosidad y no le concedió excesiva importancia, conforme a lo largo de 1901 y 1902 iban fallando sus intentos de resolverla, se dio cuenta de que presentaba un reto fundamental. Mostraba que las ideas intuitivas de clase o conjunto que había venido utilizando hasta entonces resultaban ser contradictorias y amenazaba, por tanto, con echar abajo todo su trabajo anterior.

Según la idea intuitiva, a cada propiedad corresponde una clase: la clase de todas las cosas que tienen esa propiedad. Pensemos en la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas, es decir, en la

clase de todas las cosas que tienen la propiedad de no ser miembros de sí mismas. Llamémosla $r=\{x \mid x \notin x\}$. ¿Es r miembro de sí misma? ¿Es $r \in r$? Si lo es, no lo es. Si no lo es, lo es. En efecto, si r es miembro de sí misma, entonces no es una de las clases que no son miembros de sí mismas, y por tanto no es miembro de r (es decir, de sí misma). Y si r no es miembro de sí misma, entonces es una de las clases que no son miembros de sí mismas, y por tanto es miembro de r (es decir, de sí misma). En cualquier caso, se obtiene una contradicción (r es miembro de r si y solo si r no es miembro de r):

$$r \in r \Leftrightarrow r \notin r$$

«Al principio —escribe Russell— supuse que podría superar con facilidad la contradicción, y que probablemente habría un error trivial en el razonamiento ... Durante la segunda mitad de 1901 seguía pensando que la solución sería fácil, pero al término de ese tiempo había llegado a la conclusión de que se trataba de una tarea enorme.» Mientras la difusión de la paradoja de Russell producía conmoción en toda la Europa académica y azuzaba la llamada crisis de los fundamentos de las matemáticas, él seguía esforzándose infructuosamente en resolver las contradicciones. «Todas las mañanas —escribe— me sentaba ante una hoja de papel en blanco. Durante todo el día, salvo un breve intervalo para comer, miraba fijamente la hoja en blanco. A menudo, cuando llegaba la noche, la hoja seguía intacta ... Los dos veranos de 1903 y 1904 están grabados en mi mente como un periodo de absoluto estancamiento intelectual.»

Henri Poincaré, opuesto a la nueva filosofía logicista, comentaba con sorna: «la lógica formal no es estéril: produce contradicciones».

La teoría de las descripciones

En 1905, Russell desarrolló su teoría de las descripciones, que ayuda a entender el *status* lógico de expresiones —como «el actual rey de Francia», «el mayor número primo» o «5/0»— que, si bien parecen,

por su forma, referirse a algo, no hay nada a lo que puedan ref
El uso de estas expresiones, aunque sea para negar la existencia
por ellas presuntamente designado, resultaba algo paradójico. S
que el actual rey de Francia no existe, o que el creador del un
no existe, estoy usando la expresión nominal 'el actual rey de Fr
o 'el creador del universo', es decir, me estoy refiriendo al actu
de Francia o al creador del universo, lo cual parece presupo
existencia de las entidades cuya existencia estoy negando. Russ
suelve el problema con su famosa teoría de las descripciones, u
los primeros y paradigmáticos ejemplos de la filosofía analítica. l
lución de Russell consiste en considerar que las expresiones c
son meras abreviaturas de otras oraciones más largas en que no
ce expresión nominal alguna, por lo que no me estoy refirie
nada ni presuponiendo la existencia de nada, con lo que la pa
se desvanece.

En general, una descripción empieza por el artículo determ
('el' o 'la') y tiene la forma lógica 'el x tal que $\varphi(x)$', donde $\varphi(x)$ e
expresión que parece expresar una propiedad que caracteriza a
dividuo, es decir, que ese individuo y solo él tiene. Si, en efecto, e
sa una propiedad que caracteriza unívocamente a un individuo,
mos que se trata de una descripción propia, como, por ejemp
número natural menor que 1' (es decir, el 0). Si la expresión no
tisfecha por ningún individuo (como en el caso de 'el número n
menor que 0') o lo es por más de uno (como en 'el número natur
yor que 1'), entonces decimos que se trata de una descripción i
pia. Las descripciones propias se refieren al único individuo que
la propiedad expresada por la descripción; en eso todos est
acuerdo. El problema es cómo interpretar las descripciones impr
A este problema se han propuesto diversas soluciones. La de R
consiste en considerar cualquier oración en la que digamos alg
acerca de el x tal que $\varphi(x)$ —formalmente, ψ (el x tal que $\varphi(x)$)—
una abreviatura de otra oración en que no aparece la expresión
nal 'el x tal que $\varphi(x)$' del siguiente modo: 'ψ (el x tal que $\varphi(x)$)' e
abreviatura de (o significa lo mismo que) 'existe un x tal que
$\psi(x)$ y para todo z, si $\varphi(z)$, entonces $z = x$'. Por tanto, podemos

la existencia del x tal que $\varphi(x)$ sin contradecirnos, pues nos estamos limitando a negar que haya algo que tenga ciertas propiedades (lo cual puede ser falso, pero no contradictorio o sin sentido).

La teoría de los tipos

También 'la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas', es una expresión nominal que no designa nada, una descripción impropia. Esto lo decimos porque sabemos que su aceptación da lugar a la paradoja de Russell. Pero quizá pase lo mismo con otras expresiones. ¿Hay algún criterio para distinguir ya por su estructura gramatical las expresiones que dan lugar a contradicciones, las 'multiplicidades inconsistentes' (en la terminología de Cantor), de las otras? En 1906-1908, Russell creyó encontrar la solución definitiva a las paradojas con la invención de la teoría de los tipos. Según esta teoría —en su versión más simple (la teoría simple de tipos) y sin entrar en detalles técnicos—, todas las clases se dividen en tipos: los individuos tienen tipo 0; las clases de individuos o cosas concretas son clases del primer tipo; las clases de clases del primer tipo son clases del segundo tipo; las clases de clases del segundo tipo son clases del tercer tipo, etc. En la teoría de tipos solo puede afirmarse o negarse la pertenencia de una clase de tipo determinado n a otra clase de tipo inmediatamente superior $n+1$. Se puede decir, por ejemplo, que el número 7 es un número primo, pues el 7 es de tipo 0 y la clase de los números primos es de tipo 1. Pero no se puede decir que la clase de los números primos es (o no es) un número primo, pues ambas expresiones se refieren a clases del mismo tipo, el 1. Expresiones tales como «la clase x es miembro de sí misma» ($x \in x$) no son verdaderas ni falsas, sino que están gramaticalmente mal formadas, carecen de sentido, y no son formulables en la teoría de los tipos, con lo que las contradicciones por ellas generadas desaparecen. También las relaciones se dividen en tipos. Por ejemplo, una relación binaria entre individuos (es decir, entre objetos de tipo 0) es de tipo (0,0). Una relación binaria entre individuos y clases de tipo 1 es de tipo (0,1). En general, una relación n-aria es de tipo $(t_1, \ldots t_n)$ si es una relación entre

objetos de esos tipos (el primer objeto de tipo t_1, el segundo de tipo t_2, ... hasta el n-ésimo objeto, de tipo t_n).

Esta versión que acabamos de indicar es la de la teoría simple de tipos. En la primera edición de *Principia Mathematica*, Russell adoptó la teoría ramificada de los tipos, a fin de conformarse al principio del círculo vicioso de Poincaré: una clase no puede contener elementos que solo sean definibles en función de la clase entera. Definiciones, clases y funciones conformes con ese principio se llaman predicativas; las otras, impredicativas. La matemática clásica usa con frecuencia nociones impredicativas, como la noción de supremo (mínima cota superior) de un conjunto acotado por arriba de números reales. Precisamente el conjunto de los números reales se define —como vimos— como un cuerpo ordenado y completo, donde que sea completo significa que todo subconjunto acotado hacia arriba posee un supremo. Russell se dejó convencer por los argumentos de Poincaré de que la raíz de las paradojas estaba en la impredicatividad de las nociones empleadas. En cualquier caso, las fórmulas definitorias de clases de un mismo tipo deberían ser a su vez subdivididas (o ramificadas) según los tipos de los dominios de las variables cuantificadas que aparezcan en las fórmulas. Esto da lugar a la teoría ramificada de los tipos, mucho más complicada que la simple.

Ya a finales de 1902 había añadido Russell un apéndice poco elaborado sobre los tipos a *The Principles of Mathematics*. Todavía tardaría seis años en aclarar su noción de tipos lógicos, en resolver sus dificultades técnicas y en elaborar su teoría definitiva al respecto, presentada por primera vez en 1908 en la revista *The Americal Journal of Mathematics* bajo el título «Mathematical Logic as based on the Theory of Types» (La lógica matemática basada en la teoría de tipos), e incorporada luego en el tomo I de *Principia Mathematica*. De todos modos, tanto en el artículo de 1908 como en la obra de 1910, Russell echa a perder la supuesta motivación de la teoría ramificada de los tipos mediante la introducción del llamado axioma de reducibilidad, que dice que para cualquier función proposicional, por complicada que sea, hay otra equivalente de tipo 1. Por un lado, este axioma es arbitrario, más fruto del deseo que del entendimiento. Por otro, echa a perder la pre-

dicatividad que se trataba de asegurar mediante la ramificación de la teoría. Bajo la influencia de las críticas de Frank Ramsey, en la introducción a la segunda edición (1927) de *Principia Mathematica*, Russell renunció a la teoría ramificada de los tipos y al axioma de reducibilidad, quedándose con la teoría simple de tipos.

En 1908 (el año en que Russell propuso la teoría de tipos), Ernst Zermelo dio otra solución distinta al problema de las paradojas, axiomatizando la teoría de conjuntos de tal manera que se evitasen las paradojas conocidas. Aunque la solución de Russell es quizá filosóficamente más satisfactoria, la de Zermelo es más cómoda de manejar, por lo que ha acabado siendo la preferida por la mayor parte de los matemáticos.

Principia Mathematica

El programa logicista enunciado en *The Principles of Mathematics* habría de ser llevado a cabo posteriormente, deduciendo los principales teoremas matemáticos a partir de principios lógicos explícitos mediante las reglas de la lógica formal. Russell estudió y asimiló rápidamente tanto la lógica de Frege como el simbolismo de Peano, desarrolló la lógica de las relaciones y dispuso pronto del instrumento formal flexible y potente que necesitaba. Había llegado el momento de ponerse manos a la obra.

Russell había previsto que *The Principles of Mathematics* sería seguido por un segundo volumen, que contendría la deducción formal de los principales resultados matemáticos a partir de los principios lógicos enunciados en dicha obra. Whitehead había previsto escribir un segundo volumen de su *Treatise on Universal Algebra*, en el que pensaba descubrir y exponer los principios lógicos de las diferentes álgebras. «Nos dimos cuenta —escribe Whitehead— de que los volúmenes que proyectábamos realizar trataban prácticamente de los mismos temas, así que nos unimos para realizar la tarea en común. Esperábamos terminar el trabajo en el breve periodo de un año, pero nuestro horizonte se fue ampliando y necesitamos ocho o nueve para concluir los *Principia Mathematica*.»

La aparición de las paradojas supuso un bache en el trabajo, solo superado mediante el desarrollo de la teoría de tipos. «Después de esto —anota Russell— solo quedaba escribir el libro ... Trabajé en ello de diez a doce horas diarias durante unos ocho meses al año, desde 1907 hasta 1910.» El resultado constituye los tres gruesos volúmenes de *Principia Mathematica*, publicados entre 1910 y 1913, y que pretenden llevar a cabo de modo completo y detallado el programa logicista, reduciendo la matemática entera —y en especial la aritmética— a los principios de la lógica.

El manuscrito completo de *Principia Mathematica* fue entregado al editor en octubre de 1909. Cambridge University Press estaba dispuesta a sufragar los gastos de edición de la enorme y complicada obra hasta 300 libras esterlinas, contando con que la Royal Society (de la que Russell había sido elegido miembro en 1907) pagaría las 300 libras restantes. Pero esta institución solo contribuyó con 200 libras, con lo que Russell y Whitehead tuvieron que pagar el resto. «Nosotros ganábamos así menos cincuenta libras cada uno por diez años de trabajo», comentó Russell con ironía.

Entre 1902 y 1910 la tensión combinada de un esfuerzo intelectual agotador y de una serie de desdichas privadas hizo muy difícil para Russell desarrollar su tarea hasta el final. «Pero persistí —nos cuenta— y, al final, el trabajo quedó concluido, aunque mi intelecto jamás se recuperó por completo de aquella tensión. Y desde entonces, siempre me he sentido menos capaz que antes de abordar abstracciones difíciles.»

Sin embargo, y a pesar de su titánico esfuerzo intelectual, todavía le quedaba a veces tiempo a Russell para las actividades políticas, interviniendo en favor del libre comercio y de los sindicatos libres. En 1907 presentó su candidatura al Parlamento por el distrito de Winbledon, apoyando el sufragio de las mujeres y encontrando una brutal oposición. Perdió las elecciones, recogiendo 3.297 votos, frente a los 10.263 que cosechó su contrincante. Claro que las mujeres no podían votar. De hecho, el sufragio universal, incluyendo a las mujeres, no sería introducido en Gran Bretaña hasta 1913. En Estados Unidos fue establecido en 1920. En Francia, en 1944. En Suiza, en 1971. A todos se les

había adelantado Nueva Zelanda, que lo reconoció ya en 1893. En cualquier caso, las ideas de Russell, que tanto escandalizaban en su tiempo, acabaron por ser aceptadas en casi todas partes.

Evaluación posterior del logicismo de Russell

Dificultades surgidas en el desarrollo de los *Principia* hacen dudoso que la tesis logicista quedara en ellos probada. Por ejemplo, resulta difícil pensar que el axioma de infinitud o el de reducibilidad sean principios lógicos. Y actualmente pocos filósofos de la matemática aceptan esa tesis. En efecto, las famosas investigaciones de Kurt Gödel culminaron en el llamado teorema de incompletud, que afirma la imposibilidad de formalizar completamente la aritmética en un sistema consistente de axiomas y reglas de inferencia. Con ello, la tesis logicista quedaba arruinada. Además se fue constatando que lo que habían hecho los logicistas es reducir la matemática a la lógica más la teoría de conjuntos, no a la sola lógica, como habían anunciado.

Russell pretendió eliminar las clases a favor de las 'funciones proposicionales' o fórmulas abiertas que las definen, lo cual no es viable, ya que hay muchas más clases que fórmulas, mientras que solo hay tantas funciones proposicionales como fórmulas (o proposiciones). Si en la primera edición de *Principia* pretendía hacer una teoría sin clases, pero con conceptos (o 'funciones proposicionales'), en la segunda edición pretendía prescindir también de los conceptos de tipos superiores, aunque solo lo conseguía a costa de admitir sentencias de longitud infinita, incluso innumerable. El intento russelliano de prescindir de las clases se saldó en un fracaso. Pero eso no es óbice para que la obra gigantesca *Principia Mathematica* sea un pilar fundamental y un punto de referencia obligado de toda la lógica y la filosofía de la matemática posteriores. El mismo Gödel probó en 1930 la suficiencia (o completud) semántica del fragmento de primer orden del cálculo lógico de *Principia Mathematica*, y en 1931 probó la incompletud sintáctica del sistema formal entero, tomando de nuevo esta obra como punto de partida, como indica su propio título: «Sobre sentencias for-

malmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines» (1931).

Alonzo Church fue uno de los pocos lógicos notables que continuaron el programa logicista de Frege y Russell. Carnap y Quine también lo hicieron al principio, pero luego lo abandonaron. Otros prefirieron adherirse al programa intuicionista o al formalista, aunque a la larga ninguno de esos programas logró imponerse. Hoy en día la lógica ha alcanzado un nivel de precisión formidable, pero la filosofía de la matemática sigue siendo tan controvertida como a principios de siglo. A pesar de nuestros avances, seguimos sin saber bien lo que hacemos cuando hacemos matemáticas. Los problemas que atormentaban a Russell y a Gödel siguen planteados y sin resolver.

El fenomenismo

En 1911, Bertrand Russell pasó a aplicar el método del análisis lógico al dominio de las ciencias empíricas y de los objetos físicos. Expuso sus resultados durante la primavera de 1914 en la Universidad de Harvard y en una serie de conferencias públicas en Boston, y los publicó ese mismo año en el libro titulado *Our Knowledge of the External World* (Nuestro conocimiento del mundo exterior).

En nuestro conocimiento empírico (es decir, no puramente formal, como el lógico o el matemático), Russell distingue elementos primordiales, creídos por sí mismos; sin justificación alguna, y elementos derivados, inferidos en algún sentido (aunque sea inconscientemente) de los anteriores. Los elementos primordiales, inmediatamente evidentes, de nuestro conocimiento empírico son los datos sensibles —*sense data*— directamente percibidos por la vista, el tacto o el oído. Nuestros conocimientos referentes tanto a los objetos físicos de la experiencia cotidiana (árboles, sillas) como a los objetos teóricos de la ciencia física (campos electromagnéticos, partículas elementales) constituyen elementos derivados o inferidos de los datos sensibles.

Así como al tratar del conocimiento formal Russell había intentado reducir la matemática a la lógica, redefiniendo todos los conceptos ma-

temáticos en función de conceptos puramente lógicos, así también al tratar del conocimiento empírico Russell intentaba reducirlo a sus elementos más evidentes y seguros, es decir, a los datos sensibles inmediatos. Como Russell había indicado, «siempre que sea posible, hay que sustituir las entidades inferidas por construcciones lógicas». Él mismo propuso reducir las entidades de la física a lo dado en los sentidos mediante definiciones sucesivas. No se trata de que no podamos seguir hablando de los objetos físicos tanto observables como teóricos. Los primeros son necesarios para nuestra vida cotidiana; los segundos, para la formulación de las teorías científicas que nos permiten explicar y predecir las variaciones y regularidades en la ocurrencia de los datos sensibles. De lo que se trata (aplicando la navaja de Ockham, de que no hay que multiplicar las entidades admitidas sin necesidad) es de hallar la manera de definir los objetos físicos observables y teóricos como estructuras complejas de datos sensibles, de tal modo que los enunciados físicos (tanto cotidianos como teóricos) usuales puedan ser interpretados como abreviaturas de otros enunciados más largos en los que solo se habla de datos sensibles, y de clases de datos sensibles (y de clases de clases de datos sensibles, etc.). Cuando hablamos de los objetos físicos, estaríamos, pues, hablando en último término de lo dado en la percepción sensible. Esto no implica que los objetos físicos sean meros manojos de datos sensibles, sino únicamente que los datos sensibles proporcionan una base suficiente para la interpretación y justificación de nuestras afirmaciones físicas, o (usando una famosa distinción russelliana) que nuestro conocimiento por descripción es reducible a nuestro conocimiento directo.

A partir de los mondos datos sensibles y con la sola palanca de la lógica pura habría que reconstruir el edificio entero de la realidad. Esta heroica pretensión de reducir todo nuestro conocimiento a sus bases más firmes (la experiencia sensible inmediata y la lógica formal) tuvo gran influencia en los pensadores del Círculo de Viena.

Nuestro conocimiento del mundo exterior se limita a indicar a grandes rasgos este programa fenomenista de reconstrucción del aparato conceptual de la física a partir de los datos sensibles, pero no lleva a cabo el desarrollo detallado del mismo. El libro acaba diciendo: «El

estudio de la lógica constituye el estudio central de la filosofía: proporciona a la filosofía su método de investigación, al igual que la matemática proporciona a la física el suyo ... Todo el supuesto conocimiento de los sistemas tradicionales debe ser barrido y hay que efectuar un nuevo comienzo. A los hombres comprometidos en el desarrollo de la ciencia, que hasta ahora, y no sin justificación, se han desviado de la filosofía con cierto desprecio, este nuevo método, exitoso ya en problemas tan antiguos como el del número, el infinito, la continuidad, el espacio y el tiempo, ofrece un atractivo que los métodos más antiguos han dejado por completo de ofrecer ... La primera y única condición que es necesaria para asegurar a la filosofía en el próximo futuro unos resultados que superen con mucho todo cuanto hasta ahora ha sido realizado por los filósofos, es la creación de una escuela de hombres con entrenamiento científico e intereses filosóficos, libres de las tradiciones del pasado y no desviados por los métodos literarios de los que imitan a los antiguos en todo excepto en sus méritos».

En 1921, el joven Rudolf Carnap leyó estas palabras. «Sentí —escribe Carnap— como si ese llamamiento me hubiera sido dirigido a mí personalmente.» Carnap, que acababa de concluir sus estudios de física y filosofía, se puso a estudiar febrilmente las obras de Russell. No teniendo dinero para comprar los *Principia*, escribió al autor, preguntándole dónde podría comprar un ejemplar de segunda mano. Russell no se lo pudo decir, pero le contestó enviándole las definiciones más importantes de los *Principia*, en treinta y cinco páginas escritas a mano por él mismo. A partir de entonces, Carnap, recogiendo el guante lanzado por Russell, se dedicaría al desarrollo del programa fenomenista de reducción de nuestros conceptos físicos a los datos sensibles. Sin embargo, más bien que los datos sensibles aislados, Carnap —influido por la *Gestalttheorie*— eligió como base de la reducción las vivencias elementales (o totalidades de la percepción sensible en un instante determinado) y como punto de partida la mera relación primitiva de semejanza recordada entre vivencias elementales. A partir de esta base fenomenista (y solipsista), Carnap construyó —mediante definiciones formales que solo hacían uso del aparato lógico de Russell— el mundo de la sensación y el mundo de los objetos físicos.

En definitiva, lo que Russell había propuesto y Carnap había (al menos en parte) realizado no era sino el análisis lógico y la precisión técnicamente actualizada de la tradicional tesis empirista de que nuestro conocimiento no formal es reducible a los datos de la experiencia sensible inmediata. El programa fenomenista tropezó con muchas dificultades, puestas de manifiesto precisamente por su tratamiento *formal*. Russell pasó de tomar como base los datos sensibles de un solo individuo a tomar los de todos los seres humanos, e incluso todos los datos sensibles posibles, para acabar finalmente abandonando los datos sensibles en favor de un sistema en que se toman como base las cualidades simples y la relación de compresencia —en sus obras *An Inquiry into Meaning and Truth* (Investigación sobre el significado y la verdad), 1940, y *Human Knowledge: Its Scope and Limits* (El conocimiento humano: su alcance y sus límites), 1948—. El mismo Carnap abandonó también pronto sus investigaciones sobre el programa fenomenista, pensando que una base fisicista (o materialista) era más adecuada para el desarrollo del lenguaje científico y la comprobación intersubjetiva de los resultados. Sin embargo, el programa fenomenista, abandonado por sus fundadores, seguiría abriéndose camino. Nelson Goodman dio a la tesis fenomenista su más refinado tratamiento en *The Structure of Appearance* (La estructura de la apariencia), 1951. Las construcciones matemáticas superpuestas de Carnap ofendían el austero sentido nominalista de Nelson Goodman, que prefirió renunciar a las pompas conjuntistas y profesar la escueta disciplina de un cálculo mereológico de individuos como única herramienta formal. Como individuos tomó los *qualia*, características sensibles atemporales (como colores y sonidos) en cuanto percibidas por el observador.

Los intentos de reconstrucción fenomenista del mundo de Russell, Carnap y Goodman tenían algo de quijotesco. Nadie logró completarlos y definir, por ejemplo, el electrón como una cierta clase de clases de sensaciones. Carnap pronto abandonó el empeño y adoptó el fisicismo: los componentes últimos del mundo son las entidades físicas elementales y a partir de ellas habría que reconstruirlo todo, incluso nuestras propias percepciones. Goodman se distanció del programa por la vía de un pluralismo crecientemente refinado e irónico.

Tanto la tesis logicista (la matemática es reducible a la lógica) como la tesis fenomenista (la física es reducible a los datos sensibles inmediatos) no han podido ser convincentemente establecidas. En cierto modo han fracasado, pues casi ningún filósofo actual de la ciencia las aceptaría. Sin embargo, los métodos usados en su desarrollo —los métodos del análisis lógico y la reconstrucción formal— han resultado ser extraordinariamente fecundos.

La filosofía de Russell abarca todos los problemas de la filosofía y aporta soluciones originales a muchos de ellos que aquí no podemos mencionar siquiera.

Durante los años anteriores y posteriores a la Primera Guerra Mundial, Ludwig Wittgenstein estuvo estudiando filosofía con Russell y colaborando con él en la formulación de la filosofía que luego aparecería en la *Filosofía del atomismo lógico* (1919) de Russell y en el *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) de Wittgenstein. La distinción entre lo falso y lo sin sentido, introducida por Russell a propósito de la teoría de los tipos, ejerció un notable influjo en el Círculo de Viena. Russell anticipó las ideas más tarde desarrolladas por Tarski para evitar las paradojas semánticas mediante la distinción de una jerarquía de metalenguajes. La teoría de las descripciones de Russell permitió a Quine la formulación de su famoso criterio ontológico. Hacer la lista de las influencias de Russell equivaldría a contar toda la historia de la filosofía contemporánea.

Filósofo práctico

Bertrand Russell se ha ganado un puesto de primer plano en la historia del pensamiento sobre todo gracias a sus aportaciones a la lógica y a la filosofía. Sin embargo esta actividad filosófica y científica no fue sino una faceta de su rica personalidad, que también se manifestó con lucidez y apasionamiento en los más variados dominios de la praxis.

Hombre que sentía aguda e intensamente el dolor y la opresión de los otros humanes, Russell dedicó una considerable parte de sus ener-

gías a la lucha contra la brutalidad, la irracionalidad, el dogmatismo y la injusticia.

Ya en 1903-1904, Russell estuvo haciendo campaña a favor del libre comercio internacional, conforme al internacionalismo defendido por los liberales radicales como él, en contra de la postura imperialista entonces defendida por el gobierno británico, que pretendía introducir aranceles para proteger al Imperio británico frente a la competencia exterior.

Russell siempre fue un ardiente partidario de la igualdad de derechos de las mujeres. En 1907 fue candidato al Parlamento por la unión pro sufragio femenino, que defendía el derecho al voto de las mujeres. A pesar del apoyo entusiasta de Alys y del movimiento feminista, no resultó elegido, y tuvo que aguantar insultos, mofas y violencias sin cuento.

En el prólogo a su autobiografía, Russell afirmó que «tres pasiones, simples pero abrumadoramente fuertes, han gobernado mi vida: el anhelo de amor, la búsqueda del conocimiento, y la insoportable piedad por los sufrimientos de la humanidad. Estas pasiones, como grandes vientos, me han llevado caprichosamente de acá para allá sobre un océano de angustia, llegando al límite mismo de la desesperación». Si en la etapa de 1897-1913 la pasión predominante había sido la búsqueda del conocimiento, en la siguiente predominaría la piedad por los sufrimientos de la humanidad.

Apenas vuelto a Inglaterra de su viaje a Estados Unidos en 1914 estalló la Primera Guerra Mundial, contra la que Russell se manifestó desde el primer momento. A principios de 1916 se intodujo el servicio militar obligatorio en Gran Bretaña. Cuando seis activistas fueron detenidos por repartir un panfleto en contra, Russell publicó en el diario *The Times* una carta, declarándose autor del panfleto, a consecuencia de lo cual fue expulsado del Trinity College de la Universidad de Cambridge, del que había sido nombrado profesor cuatro años antes. La Universidad de Harvard lo volvió a invitar a impartir allí sus clases, pero el gobierno británico le negó el pasaporte. Russell siguió escribiendo contra la guerra e incluso hizo llegar de contrabando una carta pública al presidente Woodrow Wilson, pidiéndole que Estados Uni-

dos no entrase en la guerra. A finales de 1917 publicó un artículo sobre la oferta de paz alemana, como consecuencia del cual fue condenado a seis meses de cárcel, de los que sirvió cuatro en la prisión de Brixton. Aprovechó su encarcelamiento para escribir en la celda la *Introduction to Mathematical Philosophy* (Introducción a la filosofía matemática), brillante exposición divulgadora de los resultados de sus investigaciones anteriores, que sería publicada más tarde, en 1921.

El anhelo de amor era otra de las grandes pasiones que habían dominado su vida. Amó apasionadamente a diversas mujeres, y repetidamente se desenamoró de ellas en medio de grandes crisis, que lo sumían en la desesperación. Seis años después de su boda con Alys, se apagó su amor con ella, aunque solo se separaron diez años más tarde, en 1911. Entre 1911 y 1916 fue amante de Lady Ottoline Morrell, que luego siguió siendo su confidente, y a la que llegó a escribir dos mil cartas. Desde 1916 fue amante de Lady Constance Malleson, «Colette», una hermosa actriz de la que estaba locamente enamorado, pero de la que se sentía siempre celoso y poco atendido. De todos modos, la mujer decisiva para su interés por los niños y por la educación fue Dora Black.

Dora

El primer encuentro de Dora Black con Russell tuvo lugar en junio de 1917, durante una excursión a pie por la campiña de Surrey en compañía del lógico francés Jean Nicod y otras personas. Dora, una joven radical de veintitrés años, decididamente opuesta a la guerra, hacía tiempo que era una admiradora distante pero ferviente de Russell. Por la tarde, se reunieron todos en una taberna a hablar acerca de lo que más deseaban en esta vida. Mientras los demás hacían alardes de deseos intelectuales y rebuscados, Dora dijo que lo que más deseaba es tener hijos. Russell quedó impresionado por su sinceridad. Poco después marchó con su padre a Estados Unidos.

Vuelta a Inglaterra dos años más tarde, Dora reanudó sus estudios de literatura francesa del siglo XVIII. En junio de 1919 ya era una joven

de veinticinco años, llena de confianza en sí misma, con ideas radicales y un notable desprecio por los convencionalismos sociales. Escribió una carta a Russell, preguntándole si estaría dispuesto a dar unas conferencias populares de filosofía o a sugerir quien las diese. Russell la invitó a venir a su casa a tomar el té y discutir el asunto. La conversación se alargó. Dora expresó su repulsa del matrimonio convencional y legal y su decidida preferencia por el amor libre.

Russell, junto al matemático Littlewood, había alquilado para el verano una casa junto al mar en Lulworth (Dorset). Antes de partir, invitó a Dora a cenar y le sugirió que más adelante fuese a pasar unos días en Lulworth. Al día siguiente de llegar a Lulwoth, Russell recibió la visita de Colette, con la que tuvo un encuentro apasionado. El 11 de julio Russell volvió a Londres a dar una conferencia *On Propositions* (sobre las proposiciones) en la Aristotelian Society. Luego visitó a Dora en su apartamento y la invitó a irse con él de inmediato a Lulworth, cosa que ella hizo con mucho gusto. Allí, a la orilla del mar, se convirtió en su amante. Daban largos paseos, se bañaban desnudos en el mar, discutían y gozaban de la naturaleza y de sí mismos. De todos modos, al cabo de unos días Colette envió un telegrama, diciendo que venía de visita, por lo que Russell le indicó a la recién enamorada Dora que debía volverse a Londres y dejar su sitio a Colette. Cuando Colette se fue, Dora regresó. De hecho, a Russell le atraía más Colette, pero le molestaba que antepusiera su carrera de actriz a su disponibilidad para él y, sobre todo, que no quisiera tener hijos. Dora, por el contrario, siempre había dicho que le encantaría tener hijos y hacía el amor con Russell sin ningún tipo de precauciones. De hecho, él estaba enamorado de las dos. Colette obtuvo un papel estelar como Helena en la producción *The Trojan Women*, de Lewis Casson, y estaba menos dispuesta que nunca a bandonar su carrera y a tener hijos. Russell estaba frustrado en sus instintos paternales y deseaba ardientemente tener hijos. Le propuso a Dora casarse, pero Dora no quería, prefería el amor libre. De todos modos, y bajo la presión de Russell, Dora aceptó que se casaría si se quedaba embarazada.

Durante ese verano Russell estuvo estudiando la teoría general de la relatividad, cuyas predicciones sobre la curvatura de la luz prove-

niente de estrellas lejanas al pasar cerca del Sol acababan de ser confirmadas por las observaciones de un reciente eclipse. Ludwig Wittgenstein le había enviado el manuscrito que luego se conocería como el *Tractatus*, y Russell lo estuvo leyendo con sumo cuidado. Quedó en verse con Wittgenstein en La Haya en diciembre de 1919. Influido por la lectura del *Tractatus* y por sus largas conversaciones con Wittgenstein, Russell abandonó su anterior convicción cuasiplatónica de que la lógica y las matemáticas trataban de las formas abstractas y eternas, y pasó a adoptar la postura wittgensteiniana de que los enunciados de la lógica y la matemática son meras tautologías, lo cual contribuyó a aminorar su interés por esos asuntos.

En La Haya, Russell volvió a encontrarse con Dora, y de nuevo volvieron a hacer el amor sin precauciones, a ver si quedaba embarazada. En abril de 1920, Russell y Dora estuvieron en Barcelona y luego en Mallorca. Russell había planeado ir a Rusia con Dora, pero finalmente recibió una invitación para formar parte de una delegación oficial de sindicalistas británicos, y prefirió ir con ellos. Tenía interés en conocer de primera mano lo que estaba pasando en Rusia. Su entusiamo inicial por la revolución soviética se vio pronto enfriado por lo que vio durante las tres semanas que estuvo allí. Vio a Trotski y tuvo una entrevista con Lenin, que le pareció un dogmático sin sentimientos ni imaginación. Dora trató de reunirse con él en Rusia, pero no lo consiguió, aunque recorrió el país por su cuenta y trabó amistad con John Reed en Petrogrado. Al regreso de su viaje, Russell escribió *The Practice and Theory of Bolshevism* (La práctica y teoría del bolchevismo, 1920).

A su vuelta a Londres, Russell pasó unos días felices con Colette. Sin embargo, al recibir una invitación para ir a China a dictar conferencias durante un año, decidió aceptarla y pedir a Dora que lo acompañase. Ya se había decidido por ella. Aunque en realidad estaba más enamorado de Colette, solo Dora le ofrecía lo que más le interesaba en ese momento: tener hijos.

Cuando Dora regresó de Rusia, solo les quedaban pocos días para preparar el viaje. Russell decidió divorciarse formalmente de su primera mujer, Alys, que estaba de acuerdo, pero la ley inglesa de entonces exigía pruebas de infidelidad, por lo que Russell tuvo que pasar no-

ches con Colette y Dora delante de los abogados, para probar su infidelidad y conseguir el divorcio. Dora y él estuvieron luego dos semanas en París, y en Marsella cogieron el barco. Un viaje de cinco semanas los condujo a través del Mediterráneo, el Mar Rojo, Ceilán, Singapur, Vietnam y el mar de China hasta que, finalmente, llegaron a Shanghai en octubre de 1920.

En China, Russell era ya famoso por sus libros sobre filosofía social —como *Principles of Social Reconstruction* y *Roads to Freedom* (Los caminos de la libertad)— y fue recibido con todos los honores como un gran sabio. A diferencia de lo ocurrido en Rusia, Russell quedó encantado con la civilización preindustrial de China. Dio cursos y conferencias en Beijing y el resto de China. Durante su estancia allí hablaba y discutía mucho con Dora sobre el impacto de la industrialización en la destrucción de los valores de delicadeza cultural y humana, y sobre sus experiencias en Rusia y China. En torno a esas cuestiones impartió un curso sobre «la ciencia de la estructura social», que luego se convirtió en el libro *The Prospects of Industrial Civilization* (Las perpectivas de la civilización industrial), publicado en 1923, del que él y Dora eran coautores. Los primeros seis meses (de octubre de 1920 a marzo de 1921) de su estancia en China fueron felices. De pronto, todo se vio interrumpido por una gravísima enfermedad. Russell contrajo una pulmonía doble que estuvo a punto de matarlo. Estuvo tres meses en cama, debatiéndose entre la vida y la muerte. Incluso la noticia de que ya había muerto dio la vuelta al mundo y fue publicada por la prensa. Finalmente logró sobrevivir y recuperarse. Dora, que estuvo permanentemente a su lado, descubrió que finalmente estaba embarazada, con gran alegría de Russell, encantado de poder ser padre. De hecho, ahora le interesaba más la paternidad que la filosofía. Incluso renunció a una plaza que le ofreció el Trinity College de la Universidad de Cambridge. Volvieron a Inglaterra, adonde llegaron el 27 de agosto de 1921. Fruto de sus experirencias chinas fue el libro *The Problem of China* (El problema de China), publicado en 1922.

A finales de septiembre, Russell obtuvo el divorcio de Alys y unos días después se casó con Dora (forzando su voluntad, pues ella hubiera preferido desafiar los convencionalismos sociales y seguir soltera).

En noviembre nació su hijo John. En 1923 nacería su hija Kate. A partir de ese momento lo más importante ya no sería la filosofía y las matemáticas (como lo fueron hasta la terminación de *Principia*), ni las cuestiones políticas y sociales que le ocuparon en los años siguientes, sino la educación de sus hijos y, por extensión, la educación en general.

Después de la guerra, Russell tenía que ganarse la vida como escritor, pues su mala fama (de pacifista) le impedía obtener un empleo fijo. Incluso los propietarios de una casa que trató de alquilar en Chelsea (Londres) se negaron a tenerlo como inquilino. Finalmente pudo comprar otra casa en ese mismo barrio, por cuya circunscripción se presentó como candidato al Parlamento por el Partido Laborista en 1922 y 1923, saliendo derrotado ambas veces. Dora se presentó en 1924, y tampoco salió elegida. En vista del repetido fracaso, decidieron retirarse de la política partidista. Russell se concentró en escribir y ocuparse de sus hijos. Compró Carn Voel, una casita aislada en plena naturaleza, entre el monte y el mar, cerca del Land's End, la punta occidental de la península de Cornwall. Allí, aislado de las distracciones de la ciudad, es donde más le gustaba trabajar y compartir las vacaciones con los niños. Los meses que pasó en Carn Voel con Dora y con sus hijos pequeños fueron de los más felices de su vida. Allí podía trabajar en la tranquilidad de la naturaleza, y podía bañarse en el mar y jugar con sus hijos. Como él mismo escribió, «la belleza de la costa de Cornwall está inextricablemente unida en mis recuerdos con la felicidad de ver a dos niños sanos aprendiendo a disfrutar del mar, las rocas, el sol y la tormenta».

Dora misma concentró también sus energías intelectuales en el campo de la educación, escribiendo ella misma varias obras sobre el tema: una conjunta con Russell, como ya vimos, *The Prospects of Industrial Civilization* (1923), y otras por su cuenta: *Hypatia, or Woman and Knowledge* (Hypatia, o mujer y conocimiento, 1925), *The Right to Be Happy* (El derecho a ser feliz, 1927), *In Defense of Children* (En defensa de los niños, 1932) y *Thinking in Front of Yourself and Other Plays* (Pensando enfrente de uno mismo y otros juegos, 1934).

EDUCACIÓN INFANTIL

El interés de Russell por la educación antecedió al nacimiento de sus hijos y fue despertado por la experiencia de la Primera Guerra Mundial. A ese tema dedicó un capítulo de su libro *Principles of Social Reconstruction: Why Men Fight* (*Principios de reconstrucción social: por qué luchan los hombres*, 1916). Ya entonces su primer argumento contra las escuelas convencionales se basaba en que fomentaban el militarismo. Las guerras son tan absurdas, que ninguna persona inteligente querría tomar parte en ellas. Las escuelas públicas, a fin de conseguir hombres dispuestos a luchar, tenían que promover la estupidez. Russell había tenido la impresión de que a la mayoría de la gente le gustaba la guerra, lo que atribuía a impulsos inconscientes destructivos, resultados de frustraciones infantiles. Esto lo llevó a echar mano de ciertas nociones de Freud, a pesar de que tenía muchas reservas sobre el carácter científico de la teoría psicoanalítica.

Tras el nacimiento de sus dos infantes con Dora, Russell se interesó vivamente por la pedagogía. En 1926 publicó su libro *On Education Especially in Early Childhood* (Sobre la educación, especialmente en la primera infancia), que tuvo una gran difusión y fue traducido a muchas lenguas. En 1932 publicó su segundo libro sobre esta temática, *Education and the Social Order* (La educación y el orden social). También escribió numerosos artículos en los que popularizó sus ideas pedagógicas.

Russell pensaba que la educación, tal y como se había estado practicando hasta entonces, dependía generalmente de la Iglesia, del Estado o del «rebaño» o multitud. Todas estas influencias tenían como efecto impedir o agostar el desarrollo de la inteligencia e iniciativa del individuo, sumergido desde pequeño en un mar de adoctrinamiento y propaganda. Los maestros suelen ser funcionarios del Estado, encargados de fomentar el patriotismo y el nacionalismo entre sus alumnos. La Iglesia solo se preocupa de perpetuar su propio dogma, indiferente a la verdad y a la felicidad. El nacionalismo y el cristianismo se imponen así en las mentes de los ciudadanos desde su más tierna infancia, cuando aún no tienen la oportunidad de pensar por su cuenta. La in-

fluencia del «rebaño» acaba de completar esa tendencia hacia el conformismo.

Como Bertrand Russell escribe, «antes de emitir una opinión definida acerca de la educación que nos parece preferible, debemos tener alguna idea de la clase de persona que deseamos producir». Según Russell, lo mejor sería producir personalidades libres, independientes y vigorosas, capaces de amor y de conocimiento, que son los dos grandes valores que vale la pena cultivar. Precisando un poco más, Russell enuncia las cuatro características que debe fomentar la educación: «Cuatro son las características que me parecen necesarias para la formación básica de un carácter ideal: vitalidad, valor o coraje (*courage*), sensibilidad o amor (*sensitiveness*) e inteligencia». La vitalidad se identifica con la salud y el vigor, con la alegría de vivir. El coraje es la ausencia de miedos irracionales (compatible con el miedo a los peligros reales). La sensibilidad es la capacidad de sentir emociones, amor, compasión, etc. Estas tres primeras características constituyen el carácter, que básicamente se forma hasta los seis años. A partir de los siete años, lo más importante es el desarrollo intelectual, que se guía por los siguientes principios: (1) el desarrollo del carácter debería estar ya casi concluido a la edad de seis años; (2) el conocimiento que se imparte no debería utilizarse para apoyar o probar ninguna conclusión moral o política determinada; (3) hay que cultivar ciertas virtudes intelectuales que son esenciales para la adquisición exitosa del conocimiento, como la curiosidad, la apertura de espíritu, la creencia de que es posible (aunque difícil) obtener conocimiento a través del esfuerzo, la paciencia, la concentración y la exactitud; y (4) debería haber un sentido de aventura en el proceso educativo. Respecto a la universidad, Russell desarrolló un proyecto de universidad internacional, ajena a los intereses y propagandas nacionalistas de los diversos estados.

Las ideas de Russell sobre la educación estuvieron influidas, además de por sus propias reflexiones, por las ideas psicológicas del conductismo de Watson y del psicoanálisis de Freud (a pesar de que nunca llegó a convencerlo) y, sobre todo, por las teorías y experiencias pedagógicas de María Montessori y Margaret McMillan. María Montessori (1870-1952), italiana, médica y pedagoga, desarrolló el método

que lleva su nombre para educar a los niños. Pensaba que los niños deberían ser libres para desarrollar su curiosidad y hacer sus propios descubrimientos. No deberían ser premiados ni castigados. Russell era un admirador del método Montessori: «Si insistimos en enseñar a un niño, deducirá que le pedimos algo desagradable para complacernos, y opondrá alguna resistencia psicológica. ... Si, por el contrario, estimulamos el deseo del niño de saber, y después, como un favor, le damos el conocimiento que desea, la situación cambia por completo. Se necesita mucha menos disciplina externa, y se asegura la atención sin dificultad»[3]. Margaret McMillan (1860-1931), americana afincada en Inglaterra, estableció en Londres un parvulario y una escuela de maestros, que pronto adquirieron gran reputación, a pesar de atender sobre todo a niños pobres y de clase media. Diseñó locales y muebles alegres y adecuados, insistió en aprender las cosas haciéndolas, fomentó la iniciativa de los niños, se preocupó por la salud y el desarrollo psicológico de los alumnos y subrayó —también ella— la necesidad de maestros muy bien formados. Russell conocía y admiraba su escuela.

Tanto Bertrand como Dora tenían una opinión muy negativa de la educación que se impartía en las escuelas inglesas de su tiempo. Como escribía Dora: «La escuela de hoy en día, en general, está llena de clasismo, obcecada de nacionalismo y gobernada por estándares medievales de virtud y pensamiento. Prepara a la gente para un mundo que ya ha pasado, proporcionándoles las creencias y, en gran parte, las habilidades que pertenecían a aquel mundo». Pensaban que las escuelas frustraban la curiosidad y desarrollo natural de los niños y les imbuían todo tipo de prejuicios.

Insatisfechos de la educación autoritaria entonces vigente, Bertrand y Dora decidieron abrir su propia escuela, a la que enviar a sus hijos. Se trataría de una escuela experimental de carácter avanzado. Para ello tenían que empezar por encontrar el local adecuado. Frank Russell (el hermano de Bertrand), que necesitaba dinero, alquiló encantado su casa de las colinas de Sussex, llamada Telegraph House (por el papel que había jugado en la transmisión de la noticia de la vic-

[3] B. Russell, *On Education*, pág. 200.

toria de Trafalgar) y situada cerca de Petersfield, para que sirviese de escuela. La escuela, llamada de Beacon Hill, fue inaugurada en septiembre de 1927, contando al principio con doce alumnos internos (entre los que se encontraban los hijos de Bertrand y Dora, John y Kate; de cuatro y seis años, respectivamente) y cinco externos.

La escuela estaba situada en una finca de unas 100 hectáreas cubiertas de bosque, en la que previamente solían entrar los cazadores en sus cacerías de zorros. En cuanto Russell abrió allí su escuela, lo primero que hizo fue prohibirles la entrada, lo cual provocó resentimiento entre los cazadores locales, que ignoraron su prohibición, rompieron las vallas y entraron a cazar de todos modos. Russell los denunció y los obligó a pagar daños y perjuicios. Como él mismo explicó, «no podía esperar proporcionar a los niños de su escuela un punto de vista correcto, si deliberadamente permitía la tortura de animales por diversión humana». Russell quería evitar que los niños viesen escena alguna de crueldad. Ni siquiera quería que se matase una avispa o culebra en su presencia. La caza tradicional del zorro es sumamente cruel, y acaba con el desgarramiento del zorro por la jauría de perros. Russell no podía tolerar tal espectáculo a la vista de sus párvulos. De todos modos, entre la sociedad local su oposición a la caza del zorro causaba todavía más escándalo que su defensa del ateísmo, el pacifismo y el amor libre.

Según Russell, la educación «debe empezar con la composición química del niño, cuidando su salud como si fuera una planta en el semillero y fomentando su iniciativa y su inteligencia como sus más vitales posesiones»[4]. Los niños estaban separados por grupos de edad. Entre cinco y siete años aprendían a leer, escribir y sumar, pero solo si querían. Dora escribió que «al principio tratamos de enseñar las cosas que el alumno quiere aprender, comentando solo más tarde cuál es la utilidad de los diversos tipos de conocimiento».[5] A partir de los ocho años se ocupaban también de geografía, historia, literatura, composición propia de obras literarias, ciencias y matemáticas, francés y ale-

[4] Bertrand Russell, In Our School, *New Republic*, September 9, 1931, págs. 92-94.

[5] Dora Russell, Beacon Hill, en Trevor Blewitt (ed.), *The Modern Schools Handbook* (Londres, 1934), págs. 29-42.

mán (por Dora). Cada año los propios alumnos escribían e interpretaban una obra de teatro inventada por ellos. El interés por el propio cuerpo era el punto de partida para aprender algo de anatomía y fisiología. Cuestiones sobre el sexo eran respondidas con naturalidad.

Según comunicaba Russell por carta a un solicitante de información: «Respecto a la religión, no hay enseñanaza religiosa de ningún tipo, los niños aprenden hechos históricos sobre las diversas religiones del mundo, pero ninguna religión recibe un trato especial. Nos preocupamos de que la educación no esté inspirada por el patriotismo, especialmente en la enseñanza de historia y geografía, que son las enseñanzas que yo imparto. ... La moralidad debe surgir, no puede ser implantada por decreto». Los propios alumnos decidían sobre las reglas de la escuela. Su libertad solo estaba limitada por la necesidad de cuidar su higiene, su salud y la paz interna. Así, tenían que lavarse y dormir suficientemente, aunque no quisieran. En verano, si hacía calor, se permitía a los niños estar desnudos, especialmente para bailar y hacer ejercicios al aire libre. Estas ideas y prácticas fueron objeto de escándalo y crítica popular. Muchas historias apócrifas sobre la escuela circulaban, puestas en circulación por sus enemigos. Según una de ellas, cuando el párroco local llamó a la puerta de la escuela, abrió una niña desnuda. «¡Dios mío!», exclamó el párroco; a lo que la niña replicó «Dios no existe», cerrándole la puerta en las narices. Los críticos de la escuela pensaban que los niños tenían demasiada libertad, que aprendían poco, y que no se preparaban para el duro mundo exterior.

De hecho la escuela tenía problemas. Russell era un mal administrador. Además, la escuela consumía más dinero del disponible. Frank retiró los muebles. El suministro de agua era insuficiente para una escuela y costó mucho el ampliarlo. Russell tenía que trabajar y escribir a un ritmo frenético para sacar dinero con el que financiar la escuela. También hizo cuatro giras por América para ganar dinero en 1924, 1927, 1929 y 1931. De cada una de ellas se traía unos 10.000 dólares. Otro problema era la dificultad de encontrar maestros que satisficiesen las expectativas de Russell. Además, algunos de los alumnos inscritos eran niños difíciles, con problemas especiales, lo que acababa de complicar las cosas.

Mientras Bertrand y Dora se llevaron bien, Russell se dedicó con entusiasmo a la escuela. El matrimonio de Russell con Dora se vino abajo en los años treinta. En 1934, Bertrand se separó de Dora y dejó la dirección de la escuela. En 1935, Bertrand y Dora se divorciaron. Dora siguió ocupándose de la escuela durante todavía casi una década más. En 1936 la escuela se trasladó a Boyles's Court (en Essex) y luego a Carn Voel (en Cornwall). La escuela fue clausurada en 1943 (bien entrada la Segunda Guerra Mundial) por orden del Ministerio de la Guerra, que temía una invasión de Hitler por la costa cercana y decidió evacuar los edificios de la zona.

MATRIMONIO Y MORAL

En cuestiones de sexualidad y reproducción, Russell siempre se opuso a la moral cristiana tradicional, que él consideraba hipócrita, cruel e irracional. Defendió que la sexualidad dejase de ser tabú, propuso el matrimonio a prueba entre jóvenes y abogó por el control de la natalidad, además de quitar importancia a la infidelidad conyugal. En 1929 publicó su libro *Marriage and Morals* (Matrimonio y moral), en el que exponía sus opiniones al respecto. El libro tuvo un gran éxito y contribuyó al cambio de las costumbres, pero pronto le acarrearía problemas en Estados Unidos. Durante esos años Russell siguió escribiendo libros de filosofía y divulgación científica, como *The ABC of Relativity* (El ABC de la relatividad, 1925) y *The Analysis of Matter* (El análisis de la materia, 1927), así como otros de carácter más general, como *Sceptical Essays* (Ensayos escépticos, 1928), *The conquest of Happiness* (La conquista de la felicidad, 1930) y *The Scientific Outlook* (La perspectiva científica, 1931).

En 1936, Russell se casó con Patricia Spence ['Peter'], su tercera esposa, de la que tuvo un hijo, Conrad, en 1937. Desde septiembre de 1938 hasta mayo de 1944 permaneció en Estados Unidos con Patricia y su hijo Conrad. Durante el primer invierno dio un curso en la Universidad de Chicago (al que asistían Rudolf Carnap y Charles Morris). En 1939 trasladó su actividad académica a la Universidad de Califor-

nia en Los Ángeles. Fruto de sus clases en Chicago y Los Ángeles fue su libro *An Inquiry into Meaning and Truth* (Investigación sobre el significado y la verdad). Finalmente, en 1940 fue nombrado profesor del City College de New York, lo cual dio lugar a una tempestad de protestas (debidas a su libro *Matrimonio y moral*) de los cristianos fundamentalistas, como el obispo Manning, que acusaba a Russell de sentar cátedra de indecencia y de corromper a la juventud. Una histérica campaña llevó el asunto a los tribunales, y un juez católico irlandés fanático, McGeehan, lo expulsó de su cátedra de lógica y filosofía en un juicio bochornoso que recordaba al de Sócrates.

Historia de la filosofía

Aislado de Inglaterra por la Segunda Guerra Mundial, y teniendo que proveer a su familia (su mujer Patricia y los tres infantes, John, Kate y Conrad), Russell se encontró de pronto sin trabajo, pues tras el escándalo del New York City College, nadie se atrevía a emplearlo. De esta difícil situación vino a salvarlo el millonario Albert Barnes, que en 1940 le ofreció un generoso contrato de cinco años en la Fundación Barnes, en Filadelfia. Allí pasó Russell dos años y medio tranquilos, que dedicó a trabajar en la historia de la filosofía. A finales de 1942 el irascible Barnes se enfadó con Patricia y rompió su contrato con Bertrand Russell, que continuó trabajando en su historia en la biblioteca del cercano Bryn Mawr College. El resultado de esos cuatro años de trabajo fue su obra *A History of Western Philosophy* (Historia de la filosofía occidental), publicada en 1945. La mayor parte de sus capítulos corresponden a las conferencias de Russell en la Fundación Barnes.

El adelanto que recibió del editor (Simon and Schuster) le permitió a Russell pagar sus deudas y mantener a su familia hasta su vuelta a Inglaterra. Su historia de la filosofía occidental resultó un gran éxito de ventas. La obra —escribe Russell— «se convirtió en mi principal fuente de ingresos durante muchos años e incluso, durante un tiempo, logró escalar la lista americana de *best-sellers*».

En el prefacio, Bertrand Russell reconoce que él no es un especialista de ninguno de los temas históricos que trata, con una sola excepción: Leibniz. En efecto, ya en 1900 había publicado un libro sobre *The Philosophy of Leibniz* (La filosofía de Leibniz), y fue uno de los primeros tratadistas en tomarse en serio los documentos inéditos de Leibniz publicados por Couturat y que presentaban una imagen muy distinta —mucho más rigurosa y coherente, a la vez que más heterodoxa— del pensamiento leibniziano. En cualquier caso, y como él mismo señala, es imposible que el autor de una historia general de la filosofía sea un especialista en los temas tratados. Su aportación consiste más bien en abordar los temas con espíritu fresco y establecer conexiones y comparaciones inesperadas entre los diversos pensadores y periodos, cosas que Russell hace con indudable brillantez. El estilo claro, gracioso, irreverente e incisivo de Russell es sin duda la principal causa del inmenso éxito de esta obra, a pesar de sus defectos y desproporciones. La desproporción más extraña consiste en que la obra dedica mucho espacio a la filosofía antigua y medieval, poco a la moderna y casi nada a la contemporánea, es decir, a la del siglo XX, que es la que Russell mejor conocía. Ello se debe sin duda a las circunstancias de su composición. Russell pensaba haber trabajado cinco años en el proyecto en la Fundación Barnes, pero su trabajo se vio interrumpido a la mitad, por lo que las partes posteriores de la obra recibieron un tratamiento comparativamente mucho más sumario que las anteriores.

La última etapa

Preocupado por el riesgo de una nueva guerra mundial, Russell pasó gran parte de los años cincuenta organizando campañas a favor del desarme, y en especial contra el armamento atómico y las pruebas nucleares. Crítico implacable de todas las opresiones, lo mismo denunció desde el principio la total supresión de las libertades en la Unión Soviética que criticó severamente la intervención norteamericana en la guerra del Vietnam.

En 1944, P. A. Schilpp publicó dos volúmenes de homenaje a Bertrand Russell. Entre los autores que analizaban su pensamiento se encontraban figuras de la talla de Albert Einstein, Kurt Gödel y G. E. Moore. Un cuarto de siglo después aparecía un nuevo volumen de homenaje, titulado esta vez *Bertrand Russell, filósofo del siglo*. En efecto, ningún otro filósofo de este siglo —con la posible excepción de Wittgenstein— podría compararse con Russell en cuanto a su decisiva influencia en los más diversos campos. Sin embargo, Russell no fue el fundador de ninguna escuela filosófica: el 'russellismo' no existe. Ni siquiera mantuvo sus propias ideas estables a lo largo de su vida, sino que las sometió todas a un inacabable proceso de constante (y a veces radical) revisión.

Bertrand Russell ha sido el filósofo más prolífico de todos los tiempos. Su bibliografía abarca más de tres mil publicaciones. En la edición de sus artículos sueltos, *The Collected Papers of Bertrand Russell*, en curso de publicación desde 1983, ya han aparecido 13 tomos de unas mil páginas cada uno y todavía faltan bastantes más. Y eso sin contar sus numerosos libros, no incluidos en esa edición. Incluso a nivel privado es asombroso lo mucho que escribió: notas, diarios y una enorme cantidad de cartas. En los Russell Archives (en la Universidad de McMaster, en Hamilton, Canadá) se conservan más de 40.000 de sus cartas.

En su larga vida —vivió noventa y ocho años—, Russell vio triunfar muchas de las ideas y causas que había defendido, recibió innumerables honores —desde la orden del Mérito hasta el premio Nobel de Literatura— y fue ampliamente leído y admirado. Su vida, tanto pública como privada, fue rica y variada. Sin embargo, su aguda sensibilidad le hizo sufrir mucho y compadecerse intensamente de las desdichas que azotaban a la humanidad y que él sufría como propias. Pero nunca perdió la esperanza, ni la inteligencia, ni el sentido del humor. Murió el 2 de febrero de 1970.

4
JOHN VON NEUMANN (1903-1957)

HUNGRÍA

En el siglo XVII, la monarquía austríaca de los Habsburgo liberó a los húngaros del yugo turco y les impuso su propio dominio. Todavía a mediados del siglo XIX la sociedad húngara seguía viviendo en el feudalismo. La servidumbre de los campesinos se mantuvo vigente hasta 1848, en que fue abolida por el reformador Kossuth, inspirado por el espíritu liberal y revolucionario que sacudió a toda Europa en ese año. Kossuth también trató de obtener la independencia para Hungría, pero fue derrotado por los ejércitos austriaco y ruso. Sin embargo, tras la derrota de Austria en la guerra con Prusia (1866), el emperador austriaco Franz Joseph ya era incapaz de mantener a los húngaros por la fuerza en su imperio. En 1867 aceptó un nuevo equilibrio o arreglo (*Ausgleich*) institucional, que instauró la monarquía dual austrohúngara, con dos estados, Austria y Hungría, cada uno con su propio Parlamento, sus propias leyes y su propio gobierno, aunque compartiendo el mismo monarca (que sería a la vez emperador de Austria y rey de Hungría), el mismo ejército, las mismas relaciones exteriores y las mismas finanzas públicas (para esas tareas comunes). Con esto se superaron las anteriores tensiones y enfrentamientos. Hungría inició así un largo periodo de casi cincuenta años de paz, prosperidad económica y florecimiento cultural, una auténtica *belle époque*.

Una gran parte de la población que habitaba los extensos territorios del reino de Hungría no eran húngaros étnicos (magiares), sino eslavos, rumanos y otros grupos, que habían sido olvidados en la monarquía dual y estaban claramente sojuzgados, discriminados y sometidos a una indeseada política de magiarización. De todos modos, la incipiente liberalización había creado ciertas oportunidades para los miembros más emprendedores de las minorías, oportunidades que fueron sobre todo aprovechadas por los judíos. Muchas familias pobres de inmigrantes judíos trabajaron duramente para dar a sus hijos una educación algo cuidada. Muchos de estos hijos educados se establecieron en Budapest, y sus hijos se dedicaban ya a los negocios o las profesiones. Entre 1870 y 1900 la población de Budapest se duplicó. Aunque los judíos eran una pequeña minoría en Hungría, en la capital, Budapest, llegaron a constituir casi la mitad de la población. A pesar de la política de magiarización, en Budapest la lengua alemana era también usada tanto por la aristocracia (por sus relaciones con la corte de Viena) como por la clase media advenediza de negociantes e intelectuales, en parte judíos, que identificaban el alemán con la lengua del progreso y la civilización.

En 1914, un serbio de Bosnia asesinó en Sarajevo al archiduque Franz Ferdinand, heredero de la monarquía dual austrohúngara. Esta declaró poco después la guerra a Serbia, sospechosa de haber propiciado el atentado, lo cual precipitó la Primera Guerra Mundial. La larga época de paz y prosperidad se había acabado. Perdida la guerra, Hungría se separó de Austria, fue obligada a renunciar a la mayor parte de sus territorios (que pasaron a Rumania, Checoslovaquia y Yugoslavia) y proclamó la república liberal en 1918. Pocos meses después, en 1919, los socialistas y comunistas de Béla Kun se hicieron con el gobierno, expropiando bancos y empresas, y lanzando a sus matones (los «Lenin boys») contra sus enemigos. Este régimen comunista solo duró unos meses, derrumbándose al ser incapaz de defender el país del ataque rumano. El terror rojo fue sucedido por el aún peor terror blanco de un nuevo régimen instaurado por aristócratas y militares y encabezado por Nicholas Horthy. La dictadura conservadora y antisemita de Horthy (en teoría, regente de una monarquía sin rey) duró

desde 1919 hasta 1944, cuando Hitler ocupó Hungría y estableció un régimen títere nazi, que envió medio millón de judíos húngaros a los campos de concentración alemanes, donde la mayoría murieron en la cámara de gas. A finales de 1944 el ejército soviético invadió Hungría, y en los años siguientes se estableció una dictadura comunista en el país.

Infancia y juventud

La Budapest anterior a la Primera Guerra Mundial, en que transcurrió la infancia de von Neumann, era una ciudad próspera en la que a la comunidad de los hombres de negocios judíos le iba razonablemente bien. El abuelo materno de John había hecho dinero con el negocio de las piedras de molino y había comprado una casa en un barrio elegante de Pest, entre los bulevares y el Danubio. Su hija Margaret se casó con el joven banquero judío Max Neumann. El gobierno húngaro se alegraba del desarrollo de la banca húngara, que rompía la previa dependencia financiera de Austria. La elite social estaba formada por los nobles. Los hombres de negocios no contaban socialmente, no eran admitidos a los círculos de influencia, a no ser que fuesen previamente ennoblecidos por el gobierno, cosa que aconteció a Max Neumann, el padre de John. Su hijo mayor, János Neumann, prefirió usar la forma germanizada y nobiliaria de su nombre, Johann von Neumann, aunque tras su emigración a América cambió su nombre propio János/Johann por John.

John von Neumann nació en Budapest en diciembre de 1903. Era el mayor de tres hermanos, más inteligente y frío que los otros, desde pequeño aficionado al estudio y al cálculo mental. A los diez años ingresó en el Colegio Luterano para chicos de Budapest. Su profesor de matemáticas enseguida se dio cuenta de que John era un niño prodigio y recomendó a su padre que le proporcionara clases particulares de matemáticas por un profesor de universidad, como así se hizo. De hecho, antes de acabar el bachillerato, John ya había resuelto algún problema abierto que tenían planteado los matemáticos de la universidad.

El niño era obviamente superdotado y ambicioso, y su padre lo apoyaba todo lo que podía. No es de extrañar que ganase el premio nacional Eötvos, que se concedía al mejor alumno de secundaria del país en matemáticas y ciencia.

Tuvo de compañero de colegio a Eugene Wigner, que estaba una clase por encima de él y que sería su amigo íntimo toda la vida. Según recordaba Eugene, «con frecuencia salíamos a pasear y él me hablaba sobre matemáticas y teoría de conjuntos y esto y lo otro. Era fascinante. Y a él realmente le gustaba hablar de matemáticas. ... Era infatigable contándome cosas acerca de la teoría de conjuntos, la teoría de números y otros temas matemáticos. Era realmente maravilloso. Nunca pensábamos en volver a casa». La incomparable inteligencia de von Neumann siempre atraía y a la vez acomplejaba a sus amigos. Aunque Wigner, por ejemplo, tenía un gran talento matemático, este palidecía en comparación con el de von Neumann, por lo que decidió no dedicarse a las matemáticas. «Habiendo conocido a János von Neumann, me di cuenta de la diferencia que había entre un matemático de primera y alguien como yo»[1].

Cuando la guerra acabó, John tenía quince años. Salió de Hungría con su familia en 1919, durante la época de desórdenes y de la revolución comunista de Béla Kun que siguió al colapso de la monarquía austrohúngara tras su derrota en la Primera Guerra Mundial. La familia de John regresó tras la caída de Kun. En 1921 el joven John (diecisiete años) fue admitido en la Universidad de Budapest, en la que de todos modos apenas hacía más que matricularse y examinarse. Enseguida dejó Budapest para estudiar en Berlín, donde oyó clases de Einstein y cultivó la amistad de sus compañeros húngaros Wigner, Szilar y Gabor. También iba con frecuencia a Göttingen, donde asistía a los seminarios de Hilbert, con quien tenía además largas conversaciones. Parecía poder estar en todas partes a la vez, pues también se matriculó en la universidad tecnológica de Zürich, donde tuvo contacto con Hermann Weyl y el matemático húngaro Georg Pólya. En 1925 se licenció en ingeniería química por Zürich, y al año siguiente se doctoró en ma-

[1] Heims, pág. 43.

temáticas por Budapest. De todos modos sus estudios más serios los realizaba en Alemania, sobre todo en Göttingen y Berlín. Su brillantez era evidente. En Göttingen encontró también a Robert Oppenheimer, que más tarde sería su colega en Princeton. En 1927 fue nombrado *Privatdozent* de matemáticas en la Universidad de Berlín a la inusualmente temprana edad de veinticuatro años. En Berlín, von Neumann tenía fama de *bon vivant*, frecuentaba los cabarés y gozaba de la trepidante vida nocturna del Berlín de final de los años veinte. Sus colegas no podían entender cómo lograba combinar tal estilo de vida con un ritmo asombroso de trabajo y con la obtención de una serie continua de importantísimos resultados matemáticos.

Se ha hablado de un «milagro intelectual húngaro» a propósito de la inusitada floración de genios científicos de ese país que a principios del siglo XX dejaron su impronta en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Es curiosa la similitud de las trayectorias de todos ellos. Todos nacieron en Budapest por la misma época. Todos eran judíos. Todos parecían superdotados desde niños y, además, tenían padres que los estimulaban y alentaban. Todos estaban empapados de cultura germánica. Todos abandonaron pronto Hungría, estudiaron y se doctoraron en Alemania, y allí iniciaron su carrera profesional, hasta que el ascenso del nazismo los hizo emigrar a Estados Unidos o Gran Bretaña. En una generación, los científicos húngaros pasaron de casi no existir a figurar en el pelotón de cabeza de la ciencia mundial. Leo Szilard (1898-1964), hijo de un ingeniero, se doctoró por la Universidad de Berlín en 1922. Huyendo de Hitler, pasó primero a Inglaterra y luego, en 1937, a Estados Unidos. Dennis Gabor (1900-1979), a quien su padre animaba contándole historias sobre Edison, se doctoró en ingeniería eléctrica en Berlín en 1927. Dejó Alemania en 1933, huyendo de los nazis. Se estableció en Inglaterra. Inventor infatigable, registró más de cien patentes. Su invención más famosa fue la holografía (método para tomar fotos tridimensionales), por lo que ganó el premio Nobel de Física en 1971. Eugene Wigner (1902-1995), hijo de un hombre de negocios y compañero de escuela de von Neumann, se doctoró en Berlín en 1925. En 1930 se trasladó a Estados Unidos, junto a von Neumann, como profesor de física matemática en Princeton. Recibió el premio Nobel

de Física en 1963 por sus contribuciones al estudio del núcleo atómico. Edward Teller (nacido en 1908) se doctoró en Leipzig en 1930. Huyendo de Hitler, se trasladó primero a Gran Bretaña y luego a Estados Unidos. Los destinos de todos ellos se cruzarían repetidamente, en Hungría, en Alemania y en América.

Los ordinales

John von Neumann fue no solo uno de los matemáticos más creativos y prolíficos del siglo XX, sino también uno de los más precoces. Su primera contribución realmente importante la hizo a los veinte años, y se plasmó en la publicación en 1923 de «Zur Einführung der transfiniten Zahlen» (Sobre la introducción de los números transfinitos). Según vimos, Cantor había definido los ordinales como los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados. El tipo de orden de un conjunto ordenado sería la noción obtenida a partir de ese conjunto cuando abstraemos de la naturaleza de sus miembros y nos fijamos solo en la sucesión de sus elementos. Precisando esta noción cantoriana, los tipos de orden pueden considerarse como clases de equivalencia (respecto a la relación de isomorfía) de conjuntos bien ordenados. Por tanto, el tipo de orden de un conjunto bien ordenado sería la clase de todos los conjuntos bien ordenados isomorfos con él. El referirse a todos los conjuntos bien ordenados encierra obvios peligros, pues es la referencia a tales clases enormes lo que a veces conduce a contradicciones en la teoría intuitiva de conjuntos. Este peligro puede ser conjurado mediante una axiomatización cuidadosa, pero Zermelo, el primer axiomatizador de la teoría de conjuntos, más bien prefirió renunciar a los números transfinitos de Cantor en su teoría, reducida así a sus aspectos más estructurales. De todos modos, von Neumann encontró una solución mucho más sencilla. En vez de identificar un ordinal con una enorme clase de conjuntos isomorfos entre sí, propuso identificarlo con un representante (un elemento) particular de esa clase, con lo cual desaparecen los peligros asociados a la gran cardinalidad y se simplifica la teoría.

En esta concepción de von Neumann, cada ordinal es el conjunto de los ordinales precedentes. Este conjunto está bien ordenado por la relación $\in$ de pertenencia o, si se prefiere, por la equivalente relación $<$ de ser menor que (entre ordinales). En efecto, un ordinal α precede a otro β si y solo si $\alpha \in \beta$, lo cual a su vez equivale a decir que $\alpha < \beta$. Así, 0 es el conjunto vacío, 1 es el conjunto cuyo único elemento es 0, 2 es el conjunto cuyos elementos son 0 y 1, y así sucesivamente. Esto vale tanto para los ordinales finitos como para los infinitos. $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, etc. El mínimo ordinal infinito $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$, $\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1\}$, etc. Ya hemos dicho que cada uno de estos ordinales está bien ordenado por la relación $\in$. En efecto, $0 \in 1 \in 2 \in 3 \ldots$ Cada conjunto bien ordenado es isomorfo a uno de estos ordinales de von Neumann. En 1937, Raphael Robinson simplificaría aún más la teoría definiendo los ordinales como los conjuntos transitivos y conectados por $\in$, es decir, como aquellos conjuntos w que satisfacen tanto $\forall x\ (x \in w \Rightarrow x \subseteq w)$ como $\forall xz\ (x \in w \wedge z \in w \Rightarrow x \in z \vee x = z \vee z \in x)$.

En 1928, von Neumann publicó su artículo «Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre» (Sobre la definición por inducción transfinita y cuestiones relacionadas de la teoría general de conjuntos), en el que la teoría de los ordinales aparece ya perfectamente desarrollada. En especial, este artículo presenta por primera vez la prueba completa del teorema general de recursión transfinita (que solo estaba indicada en el artículo de 1923). Este teorema justifica las definiciones de funciones ordinales (funciones definidas para todos los ordinales) y las demostraciones por inducción transfinita sobre todos los números ordinales. Constituye una potente generalización al ámbito transfinito de la inducción aritmética. En efecto, si queremos definir una función para todos los números naturales, basta con definirla para el 0 y, suponiendo que esté definida para un número natural n cualquiera, definirla para $n+1$, haciendo uso (si se requiere) para ello de otra función previamente definida. El teorema de recursión transfinita nos permite definir una función para todos los ordinales, definiéndola para el 0 y, suponiendo que ya esté definida para un ordinal cualquiera α, definiéndola para $\alpha + 1$, y, suponiendo que ya esté definida para todos los ordinales menores que un

ordinal límite λ, definiéndola para λ. (Recuérdese que un ordinal límite es un ordinal que no es el siguiente de otro, es decir, $\lambda \neq \alpha + 1$ para todo α.) Algo similar ocurre con las demostraciones por inducción transfinita. De hecho, este tipo de definiciones y demostraciones se usan constantemente en teoría de conjuntos, pero solo a partir de la prueba de von Neumann tal uso está justificado. Estas ideas de von Neumann sobre los ordinales han logrado universal aceptación y han sido adoptadas por casi todos los autores posteriores, incluyendo a Gödel, Bernays, Quine, Levy, etc.

ARITMÉTICA ORDINAL Y RECURSIÓN TRANSFINITA

Cantor no solo introdujo los tipos de orden, sino que nos enseñó a operar con ellos como con números (números ordinales), desarrollando su aritmética ordinal transfinita. Definamos la adición y multiplicación de tipos de orden al estilo cantoriano (modernizado). Luego veremos cómo el teorema de recursión transfinita de von Neumann permite simplificar considerablemente la teoría.

Sean (A, R) y (B,S) dos órdenes lineales, tales que $A \cap B = \varnothing$. La **unión ordenada** de esos dos órdenes lineales es otro orden lineal, designado como $(A, R) \oplus (B, S)$, y definido del siguiente modo:

$$(A, R) \oplus (B, S) = (A \cup B, R \cup S \cup (A \times B))$$

Por tanto, el orden lineal $(A, R) \oplus (B, S)$ tiene como ámbito a la unión de A y B. Dado un par de elementos (x, z) de $A \cup B$, si ambos son elementos de A, se mantiene el orden R entre ellos; si lo son de B, el S; y si uno es elemento de A y el otro de B, el elemento de A precede al de B en cualquier caso.

Ahora podemos introducir la **adición de tipos de orden**. Sean σ y τ tipos de orden tales que $\sigma = \text{tipo}\ (A, R)$, $\tau = \text{tipo}\ (B, S)$ y $A \cap B = \varnothing$. Definimos la adición + de los tipos de orden σ y τ del siguiente modo:

$$\sigma + \tau = \text{tipo}\ ((A, R) \oplus (B, S))$$

Esta definición es independiente de los representantes elegidos.

La adición de tipos de orden es asociativa, pero no es conmutativa. Por ejemplo, $1+\omega \neq \omega+1$. En efecto, tipo $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ + tipo (a) = tipo $(0, 1, 2, 3, \ldots, a) = \omega+1 \neq \omega =$ tipo $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ = tipo $(a, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, ya que $(0, 1, 2, 3, \ldots, a)$ y $(a, 0, 1, 2, 3, \ldots)$ no son isomorfos, pues el primero tiene un máximo, y el segundo, no. En general, y para cualquier número natural n distinto de 0, $n+\omega=\omega$, pero $\omega+n \neq \omega$. Por tanto, $n+\omega \neq \omega+n$. Para cualesquiera números naturales n y m distintos de 0 y distintos entre sí, $n+\omega=m+\omega$, pero $\omega+n \neq \omega+m$. Para cada tipo de orden τ: $\tau+0=0+\tau=\tau$.

Sean (A, R) y (B, S) dos órdenes lineales. El **producto lexicográficamente ordenado** (por la derecha) de esos dos órdenes lineales es otro orden lineal, designado como $(A, R) \otimes (B, S)$, y definido del siguiente modo:

$$(A, R) \otimes (B, S) = (A \times B, <), \text{ donde}$$
$$(x, z) < (x', z') \text{ si y solo si } z\, S\, z' \text{ o } (z = z' \text{ y } x\, R\, x')$$

Ahora podemos introducir la **multiplicación de tipos de orden.** Sean σ y τ tipos de orden tales que $\sigma =$ tipo (A, R) y $\tau =$ tipo (B, S). Ahora definimos la multiplicación $\cdot$ de los tipos de orden σ y τ del siguiente modo:

$$\sigma \cdot \tau = \text{tipo } ((A, R) \otimes (B, S))$$

Esta definición es independiente de los representantes elegidos.

Para multiplicar dos tipos de orden σ y τ (donde σ es el multiplicando, y τ el multiplicador) y obtener el producto $\sigma \cdot \tau$ (léase: «σ, τ veces»), tomamos τ copias de un orden de tipo σ y las colocamos una detrás de otra en orden τ. La multiplicación de tipos de orden es asociativa, pero no es conmutativa. Por ejemplo, $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$. En efecto, tipo $(0, 2, 4, \ldots 1, 3, 5, \ldots) = \omega+\omega=\omega \cdot 2 \neq$ tipo $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots) =$ tipo $(0, 1)$ + tipo $(2, 3)$ + tipo $(4, 5) + \ldots = 2+2+2+\ldots = 2 \cdot \omega = \omega$. Esta desigualdad de los tipos se sigue de la no isomorfía de $(0, 2, 4, \ldots 1, 3, 5, \ldots)$ y $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$, ya que el primer orden tiene dos elementos sin predecesor inmediato (el 0 y el 1), mientras que el segundo solo tiene uno (el 0).

En general, $n \cdot \omega = \omega$ (siendo n un número natural distinto de 0), y $\omega \cdot n \neq \omega$ (siendo n un número natural mayor que 1). Para cualesquiera números naturales (distintos y mayores que 0) n y m: $n \cdot \omega = m \cdot \omega$, pero $\omega \cdot n \neq \omega \cdot m$. Para cualquier tipo de orden τ: $0 \cdot \tau = \tau \cdot 0 = 0$, $1 \cdot \tau = \tau \cdot 1 = \tau$, $\tau \cdot 2 = \tau + \tau$.

Para la multiplicación y adición de tipos de orden vale la distributividad por la izquierda. Para cualesquiera σ, τ, μ: $\sigma \cdot (\tau + \mu) = (\sigma \cdot \tau) + (\sigma \cdot \mu)$. Sin embargo, no vale en general la distributividad por la derecha. Por ejemplo, $(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega = (1 \cdot \omega) + (1 \cdot \omega)$.

Todos estos (y otros muchos) resultados de la teoría de los ordinales son válidos bajo cualquier presentación, pero a continuación mostramos cómo el teorema de recursión transfinita de von Neumann permite simplificar considerablemente las definiciones. Una versión o consecuencia de este teorema es la siguiente (formulada en NBG usando el signo Ω para la clase propia de los números ordinales):

Si h: $\Omega \to \Omega$ es una función de ordinales y $\delta \in \Omega$, entonces existe una función de ordinales f: $\Omega \to \Omega$, unívocamente determinada, tal que

(1) $f(0) = \delta$
(2) $f(\beta') = h(f(\beta))$ para todo ordinal β [donde α' es el siguiente de α]
(3) $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$ para todo ordinal límite λ

Por tanto, podemos definir directamente la adición de ordinales del siguiente modo. Sea α un ordinal cualquiera.

(1) $\alpha + 0 = \alpha$
(2) $\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)'$ para todo ordinal β [donde α' es el siguiente de α]
(3) $\alpha + \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha + \gamma$ para todo ordinal límite λ

También podemos definir la multiplicación de ordinales del siguiente modo. Sea α un ordinal cualquiera.

(1) $\alpha \cdot 0 = 0$
(2) $\alpha \cdot \beta' = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ para todo ordinal β [donde α' es el siguiente de α]
(3) $\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma$ para todo ordinal límite λ

Este mismo proceso nos permite definir recursivamente cualquier otra función de ordinales, como la exponenciación. El teorema de von Neumann nos garantiza en cada caso que la función así definida existe y es única.

Axiomatización de la teoría de conjuntos

Cantor había creado la teoría de conjuntos guiado por su poderosa intuición matemática, pero nunca pensó en reducirla a axiomas explícitos. El primero que lo hizo fue Zermelo, que en 1908 presentó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos. Zermelo tenía dos motivaciones para hacerlo. Una motivación inmediata consistía en aclarar y explicitar los presupuestos de su prueba del teorema del buen orden, que en su primera versión había recibido críticas al respecto. Otra, más general, trataba de dar respuesta a la inseguridad creada en la comunidad matemática por el descubrimiento de las paradojas de la teoría intuitiva de conjuntos. En efecto, la vaga definición de conjunto dada por Cantor y el mero recurso a la intuición ya no bastaban para desarrollar la teoría, especialmente después del descubrimiento de la paradoja de Burali-Forti y, sobre todo, de la paradoja de Russell, que mostraba lo poco fiables que eran incluso las intuiciones conjuntistas más elementales. Ante esta situación, algunos reaccionaron proponiendo una ruptura radical con la matemática clásica, a fin de basarla en principios nuevos, seguros e indudables. Esto llevó a unos (como Brouwer con su intuicionismo) a tirar por la borda gran parte de la matemática usual, y a otros (como Russell con su teoría de tipos) a propugnar una reconstrucción general de la matemática a partir de presuntos principios lógicos (como el de reducibilidad) arbitrarios y ajenos a toda la tradición y práctica matemáticas. Zermelo, sin embargo, adoptó una actitud más prudente y conservadora. Trataba simplemente de axiomatizar la teoría de conjuntos introduciendo en la teoría cantoriana solo los mínimos cambios necesarios para evitar las paradojas, pero conservando todo el acervo impresionante de la matemática clásica.

Aunque su artículo de 1923 sobre los ordinales se basaba en la teoría intuitiva de conjuntos, en 1925 von Neumann introdujo una nueva axiomatización de la teoría en su artículo *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* (Una axiomatización de la teoría de conjuntos). En 1926 publicó su tesis doctoral por la Universidad de Budapest, en húngaro, sobre el mismo tema, y en 1928 publicó ya la versión más completa, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre* (La axiomatización de la teoría de conjuntos). Una vez formulado su sistema, se ocupó de cuestiones de cardinalidad e introdujo los modelos internos (posteriormente usados para pruebas de consistencia relativa). En 1929 publicó *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre* (Sobre una cuestión de consistencia en la teoría axiomática de conjuntos), donde se planteó la cuestión de la consistencia relativa entre los diversos axiomas y usó los modelos internos para probar dicha consistencia.

AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

He aquí los axiomas de Zermelo (en versión ligeramente simplificada y modernizada):

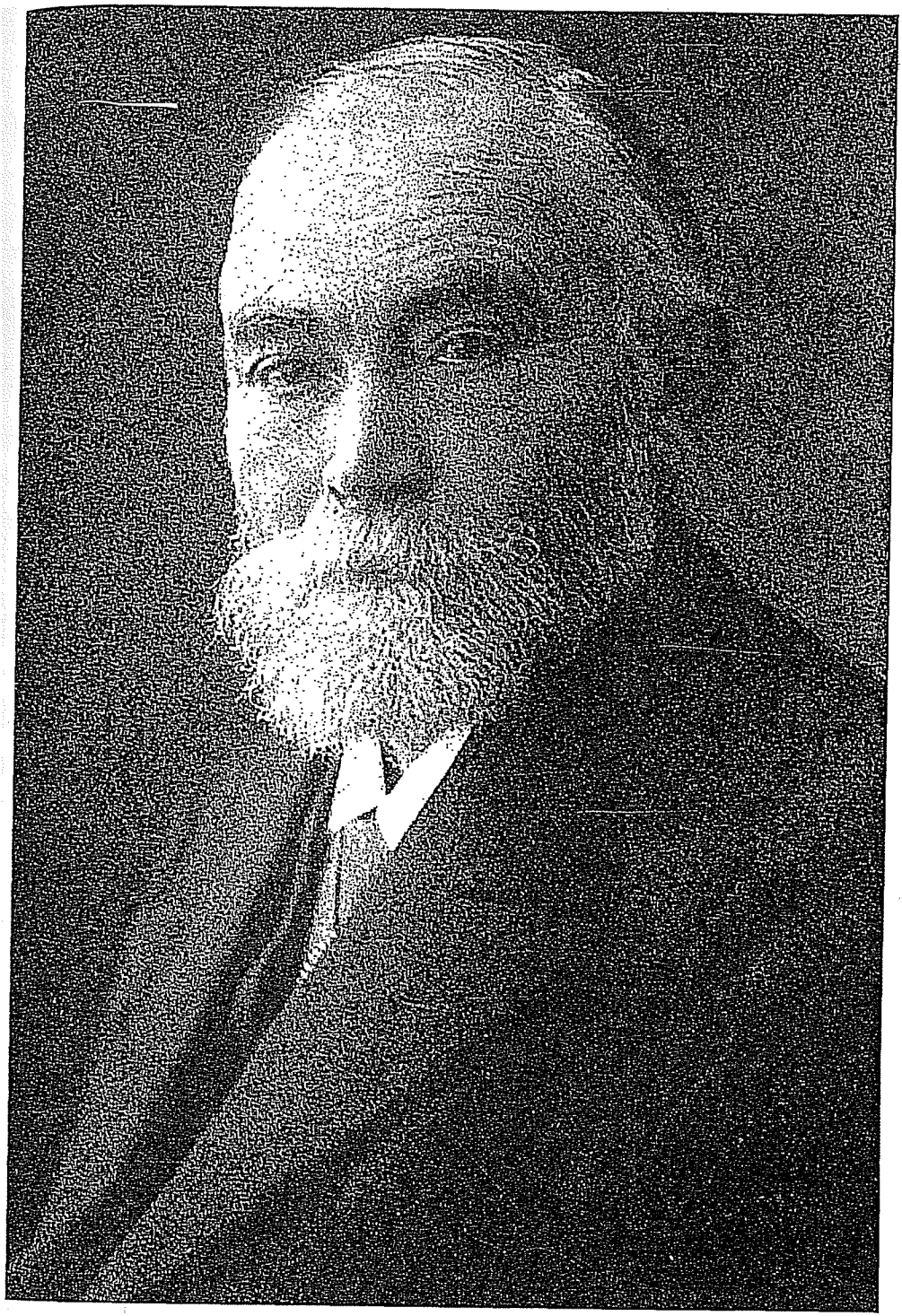
(1) [Axioma de extensionalidad] Conjuntos con los mismos elementos son el mismo conjunto.

(2) (*i*) Existe el conjunto vacío $\varnothing$. (*ii*) Para cualquier elemento a existe el conjunto unitario $\{a\}$. (*iii*) Para cualesquiera elementos a, b existe el par $\{a, b\}$.

(3) [Axioma de separación] Si M es un conjunto, entonces existe el conjunto de todos los elementos de M que satisfacen una condición bien definida cualquiera.

(4) [Axioma del conjunto de las partes] Si M es un conjunto, entonces existe el conjunto $\wp M$ de las partes o subconjuntos de M.

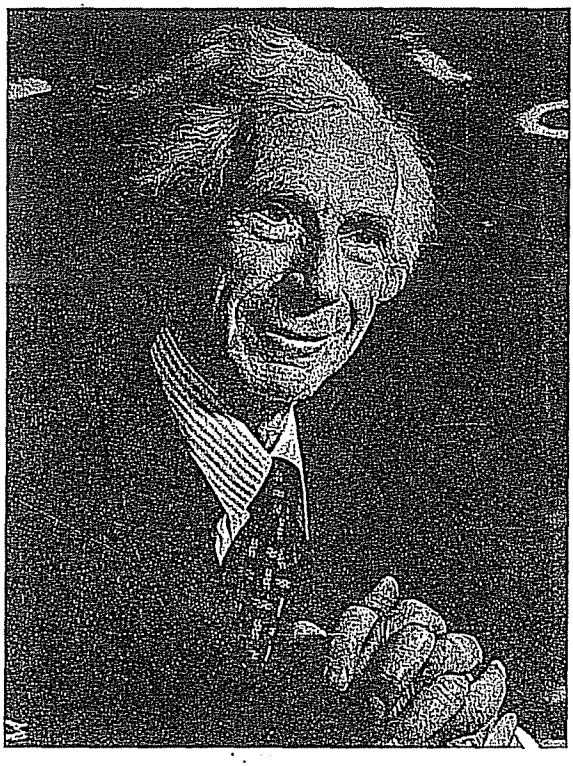
(5) [Axioma del conjunto unión] Si M es un conjunto, entonces existe el conjunto $\cup M$ de todos los elementos de elementos de M, es decir, la unión de M.



Gottlob Frege (1848-1925) en la última etapa de su vida, caracterizada por el aislamiento, la desilusión y la amargura

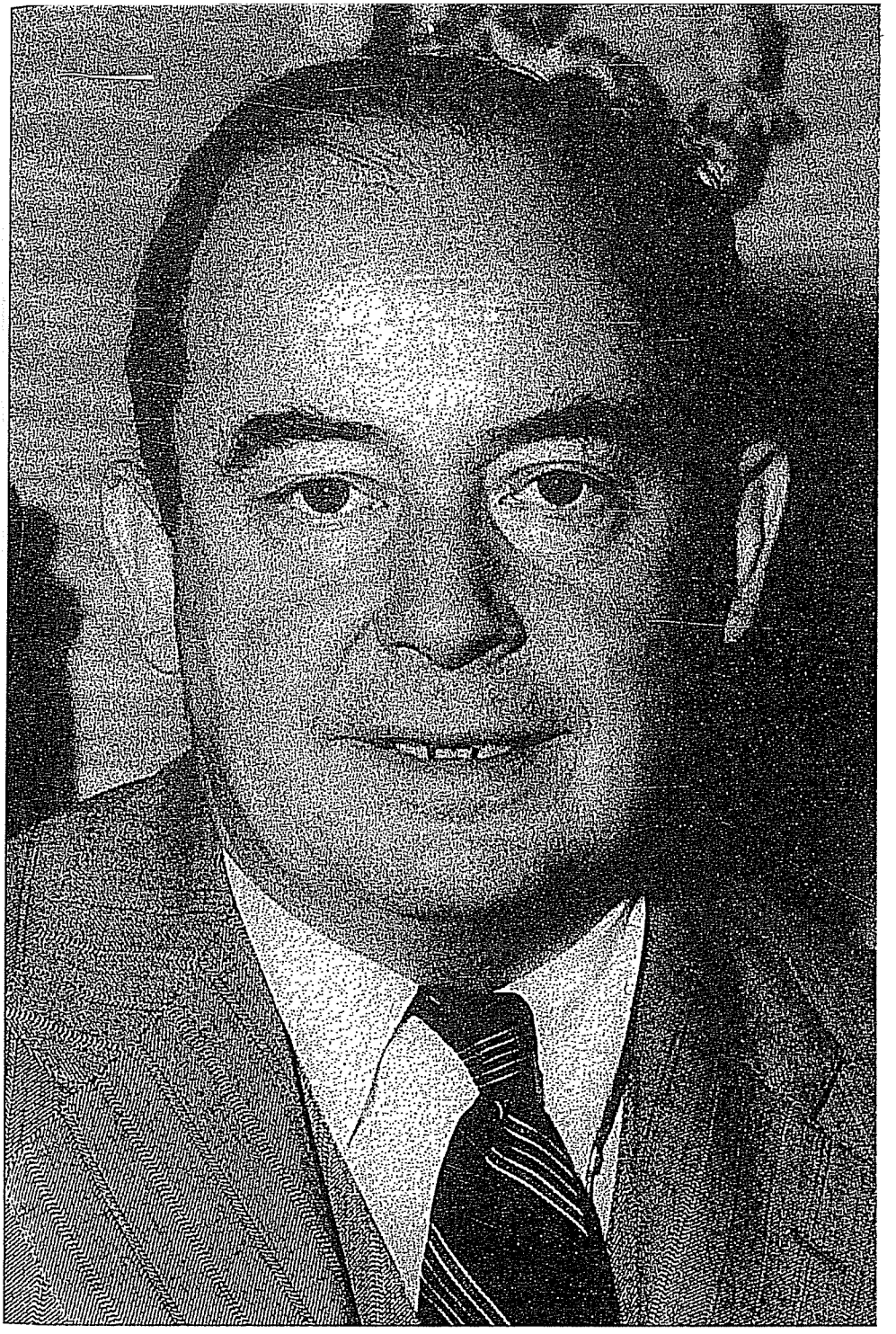
Georg Cantor (1845-1918) en 1894, en una época marcada por sus frecuentes crisis nerviosas

Bertrand Russell (1872-1970) durante su estancia en Beijing en 1921, junto a Dora, ataviada co
vestimenta china

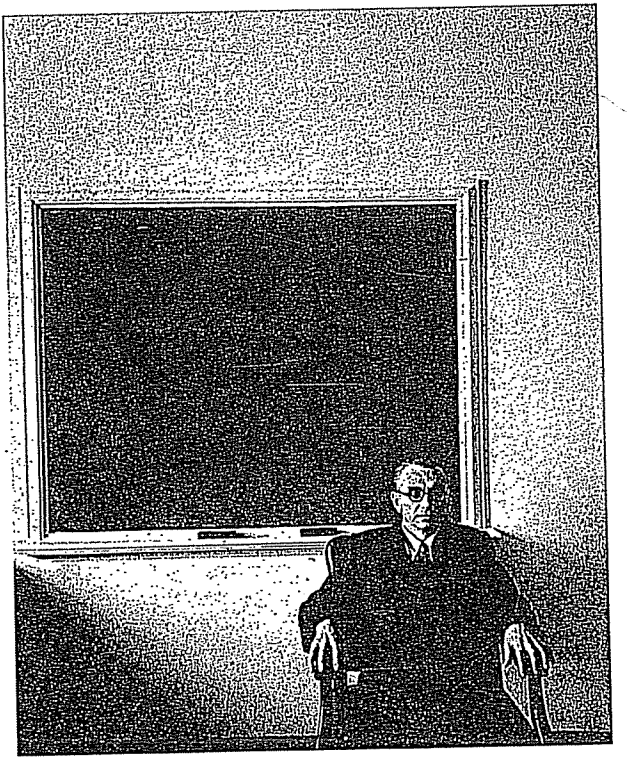


Retrato de Bertrand Russell en los años cuarenta

Bertrand Russell en 1950, recibiendo de manos del rey de Suecia el premio Nobel de Literatura por la contribución de sus escritos filosóficos a nuestra civilización moral



Adele y Kurt Gödel (1906-1978) tras su boda civil, en septiembre de 1938



Kurt Gödel en 1956, ante una pizarra del Institute for Advanced Study de Princeton

Kurt Gödel y Albert Einstein en 1954, durante uno de sus frecuentes paseos por el parque del Institute for Advanced Study de Princeton

Alan Turing (1912-195
participando (y llegand
en segundo lugar) en
carrera de las tres mill
en diciembre de 1946

Alan Turing en 1951, tras su elección
como *fellow* de la Royal Society

(6) [Axioma de elección] Para cada familia de conjuntos disjuntos entre sí y no vacíos hay una función que elige un y solo un elemento de cada uno de esos conjuntos.

(7) [Axioma de infinitud] Existe un conjunto infinito.

Estos axiomas, (excepto el 6) en parte explicitan puntos ya implícitos en Dedekind y Cantor. El axioma (6) de elección fue introducido por Zermelo para probar el teorema del buen orden. En realidad, ambos son equivalentes. El axioma de elección provocó una fuerte polémica y fue rechazado por algunos matemáticos (como Baire, Borel o Lebesgue) por su carácter no constructivo, pues afirma la existencia de una función, sin indicar cómo buscarla o construirla. Sin embargo, resultó ser equivalente a tantos resultados deseables de la matemática clásica, que acabó siendo aceptado.

El axioma (3) de separación emplea la noción un tanto vaga de 'condición bien definida', lo cual no dejó de parecer insatisfactorio a los espíritus más rigurosos. En 1922, tanto Fraenkel como Skolem indicaron que era necesario sustituir esa vaga noción por otra más precisa. Skolem propuso sustituirla por la noción precisa de una fórmula del lenguaje formal de primer orden (con $\in$ como única constante no-lógica) de la teoría de conjuntos:

(3') [Axioma de separación] Si M es un conjunto y $\varphi(x)$ es una fórmula abierta del lenguaje formal de la teoría de conjuntos, entonces existe el conjunto de todos los elementos de M que satisfacen $\varphi(x)$, es decir, $\{x \mid x \in M \wedge \varphi(x)\}$.

Con el tiempo se vio que los axiomas de Zermelo no bastaban para probar la existencia de ciertos conjuntos muy grandes (por ejemplo de cardinalidad mayor o igual que $\aleph_\omega$). Esta laguna fue rellenada con la introducción de un nuevo axioma, llamado del reemplazo, propuesto por Fraenkel y Skolem en 1922 y adoptado de un modo más decidido por von Neumann (que lo necesitaba para probar su teorema de recursión transfinita) en 1928:

(8) [Axioma del reemplazo] Si M es un conjunto y f es una función definida en M, entonces también existe y es un conjunto $f[M]$, la imagen de M en f.

Cuando los matemáticos trataron de probar que ningún conjunto es elemento de sí mismo, se dieron cuenta de que los axiomas propuestos no bastaban. Tampoco bastaban para prohibir pares x, z tales que $x \in z$ y $z \in x$, o tríos x, z, w tales que $x \in z$, $z \in w$ y $w \in x$, etc. Hay secuencias x_1, x_2, x_3, ... en que, para cada n, $x_n \in x_{n+1}$, como, por ejemplo, la secuencia misma de los números naturales (concebidos como ordinales finitos). Pero no hay (ni queremos que haya) secuencias x_1, x_2, x_3, ... en que, para cada n, $x_{n+1} \in x_n$. Pero tampoco esto se sigue de los axiomas anteriores. Por ello, Mirimanoff en 1917, Skolem en 1923 y von Neumann en 1925 introdujeron un nuevo axioma, llamado axioma de regularidad o de buena fundación, que permite obtener todos esos resultados, exigiendo que todos los conjuntos sean regulares o bien fundados.

(9) [Axioma de regularidad] Todo conjunto no vacío posee un elemento disjunto con él (es decir, si M es un conjunto no vacío, entonces hay un elemento $N \in M$, tal que $M \cap N = \varnothing$).

La noción de conjunto y la jerarquía acumulativa

Zermelo y von Neumann han sido los dos grandes axiomatizadores de la teoría de conjuntos, y sus sistemas (con algunas variaciones) aún siguen siendo los más empleados. Los axiomas (1) a (8) antes indicados se incorporan (con ligeras diferencias) a ambos sistemas. El sistema llamado ZF (de Zermelo-Fraenkel) incluye todos los axiomas (1) a (8), excepto el axioma (6) de elección. Si añadimos el axioma de elección, tenemos el sistema ZFC (la 'C' se refiere al *axiom of choice*, el axioma de elección). Tanto en ZF como en ZFC las paradojas se evitan a base de admitir solo la existencia de los conjuntos indicados en los axiomas, por lo que los conjuntos 'peligrosos' no existen y no crean problemas. Von Neumann pensó que no hacía falta tanta prudencia: se

podían admitir todas las clases de la teoría intuitiva, pero solo las inofensivas (los conjuntos) podían ser elementos de otras clases. Un conjunto es precisamente una clase que es elemento de alguna otra clase. La teoría resultante se debe básicamente a von Neumann, pero Bernays y Gödel la simplificaron y elaboraron considerablemente, por lo que la versión actual de la misma se conoce con el nombre de NBG (de von Neumann, Bernays y Gödel). ZFC y NBG son las dos principales axiomatizaciones usadas en la teoría de conjuntos actual y ambas pueden considerarse como clásicas o canónicas, aunque la primera es algo más habitual. En realidad, ambas dicen lo mismo sobre los conjuntos y se diferencian sobre todo por la mayor liberalidad de la segunda a la hora de hablar de clases enormes que no son conjuntos.

Retomando y precisando las ideas de Cantor sobre multiplicidades consistentes e inconsistentes, von Neumann introdujo una nueva axiomatización de la teoría de conjuntos, basada en la distinción entre clases y conjuntos. Las clases que Cantor había llamado multiplicidades consistentes, es decir, aquellas que no dan lugar a contradicción alguna al ser consideradas como objetos acabados y susceptibles de pertenecer a otras clases, son los conjuntos. Un conjunto es una clase normal, inofensiva, que puede siempre ser considerada como objeto y como miembro de otras clases sin problemas. Las clases que Cantor había llamado multiplicidades inconsistentes, es decir, aquellas que dan lugar a contradicciones al suponer que constituyen objetos acabados y capaces de pertenecer a otras clases, son las llamadas clases propias o últimas. Estas clases últimas son demasiado grandes. De hecho, son biyectables con la clase universal, es decir, son tan grandes como el universo conjuntista entero. Por ejemplo, la clase introducida por Russell de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos es la clase universal, es decir, la clase de todos los conjuntos (pues ningún conjunto se pertenece a sí mismo). Es una clase última, que no puede pertenecer a otra clase, evitándose así la paradoja de Russell. La clase Ω de todos los ordinales es distinta de la clase universal, pero tiene tantos elementos como ella. Es una clase última, que tampoco puede pertenecer a otra clase, evitándose así la paradoja de Burali-Forti. Una definición posible de clase última consiste en definirla como clase que tiene la misma car-

dinalidad de la clase universal. Otra definición más sencilla consiste en definirla como una clase que no es elemento de ninguna otra clase.

En su trabajo de 1925, von Neumann no habla de clases y conjuntos, sino de funciones y argumentos. De hecho, ni siquiera habla de funciones y argumentos, sino de cosas de tipo I y cosas de tipo II, aunque esas abstrusas denominaciones se refieren a las funciones y sus argumentos. Dice que no todas las funciones pueden ser argumentos, lo que equivale a decir que no todas las clases pueden ser conjuntos. De hecho, a cada clase A corresponde una función, su función característica f_A: $V \rightarrow \{0, 1\}$, donde V es la clase universal, tal que $f_A(x) = 1$ si y solo si $x \in A$, y $f_A(x) = 0$ si y solo si $x \notin A$. Bernays tradujo la teoría de von Neumann (con sus cosas de tipo I y II) a la terminología más habitual de las clases y los conjuntos, aunque manteniendo a ambos como cosas distintas. Gödel identificó a los conjuntos con las clases que son elementos de otras clases. Así quedaba configurada la teoría de conjuntos NBG tal y como la conocemos ahora.

En la teoría de conjuntos tenemos que cuantificar con frecuencia sobre todos los conjuntos, pero no tenemos una intuición suficientemente clara de qué sean los conjuntos, de cómo se formen, de en qué consista el universo conjuntista. Ya hemos dicho que los conjuntos pueden pertenecer a otras clases, pero eso no nos dice gran cosa acerca de cómo son y cuáles son. Sabemos lo que son los números naturales y cómo se forman, por lo que tenemos una visión relativamente clara del universo aritmético. Los números naturales son el 0 y los resultados de iterar un número finito de veces la operación 'siguiente inmediato de', es decir, el 0, el siguiente del 0, el siguiente del siguiente del 0, el siguiente del siguiente del siguiente del 0, etc. Pero ¿qué son los conjuntos? Von Neumann en 1929 y, sobre todo, Zermelo en 1930 propusieron considerar que los conjuntos son el conjunto vacío y los resultados de iterar un número cualquiera (finito o infinito) de veces las operaciones 'conjunto de las parte de' y 'unión de'. Esta concepción iterativa de conjunto nos proporciona una cierta intuición de cómo es y cómo se constituye el universo conjuntista. Según esta manera de verlo, el universo conjuntista estaría estratificado de un modo jerárquico y acumulativo: jerárquico, porque todo conjunto tendría un rango determina-

do, se situaría a cierto nivel; acumulativo, porque cada nivel abarcaría a todos los anteriores. Von Neumann había mostrado previamente (mediante su teorema de recursión transfinita) cómo definir funciones sobre todos los ordinales. Aplicando ese teorema a la construcción de la jerarquía acumulativa, definió una función R sobre los ordinales del siguiente modo:

$R(0) = \varnothing$
$R(\alpha+1) = \wp R(\alpha)$
$R(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} R(\beta)$ [para cualquier ordinal límite λ]

La función R 'construye' el universo conjuntista paso a paso, ordinal a ordinal. En cada paso se obtiene una nueva capa o estrato de conjuntos. Puesto que los estratos son acumulativos, si un conjunto se encuentra en uno de ellos, $R(\alpha)$, también se encuentra en todos los estratos superiores $R(\beta)$ con $\alpha<\beta$. Pero siempre hay un mínimo ordinal α, tal que el conjunto dado se encuentra en $R(\alpha)$. Ese ordinal α constituye el rango del conjunto.

Un conjunto es regular o bien fundado si se encuentra en uno de esos estratos de la jerarquía acumulativa, es decir, el conjunto x es regular si y solo si hay algún ordinal α, tal que $x \in R(\alpha)$. A través de von Neumann, Zermelo y Gödel se fue abriendo camino la idea de identificar el universo conjuntista con la jerarquía acumulativa. De hecho, el axioma de regularidad o buena fundación, que dice que todos los conjuntos son regulares o bien fundados, puede enunciarse también diciendo que cada conjunto se encuentra en alguno de los estratos definidos por R, es decir, que cada conjunto tiene rango, es decir, que el universo conjuntista V es precisamente la clase de los conjuntos de la jerarquía acumulativa:

$$V = \bigcup_{\beta \in \Omega} R(\beta)$$

Von Neumann probó además la consistencia relativa del axioma de regularidad respecto al resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, construyendo un modelo interno. Sea T la teoría de conjuntos sin axio-

ma de regularidad. Si *T* es consistente, se cumple en una realización o modelo (*U*, *E*), donde *U* es el universo de los conjuntos en esa realización y *E* es la relación de pertenencia que corresponde a $\in$ entre objetos de *U*. Sea Reg el subconjunto de *U* de los objetos regulares de *U*, es decir, de los conjuntos regulares (en esa realización). Sea *E*|Reg la restricción de (la relación correspondiente a) $\in$ a objetos de Reg. Von Neumann probó que (Reg, *E*|Reg) satisface tanto a los axiomas de *T* como al axioma de regularidad. Por tanto, si *T* es consistente, entonces *T* + axioma de regularidad es también consistente.

El interés de von Neumann por las pruebas de consistencia relativa se encuadraba en la perspectiva del programa de Hilbert. En efecto, Hilbert se había propuesto probar por métodos metamatemáticos finitistas la consistencia de las teorías (infinitistas) de la matemática clásica, consideradas como meros juegos con hileras de signos, a fin de despejar de una vez por todas las dudas sobre la matemática clásica. Von Neumann enseguida se puso a colaborar con Hilbert en la tarea, que creía ya casi al alcance de la mano. En 1927 publicó algunas de sus investigaciones en esa dirección en «Zur Hilbertschen Beweistheorie» (Sobre la teoría de la prueba de Hilbert). Sin embargo, cuando en 1931 leyó el famoso artículo de Gödel con su teorema de incompletud, von Neumann inmediatamente lo entendió y aceptó sus conclusiones, reconociendo al instante que su empeño había sido vano. Estaba dando un curso en la Universidad de Berlín sobre los fundamenteos de la matemática, pero tras esa lectura lo interrumpió y pasó a explicar en clase los resultados de Gödel.

Mecánica cuántica

La hipótesis atomista (la idea de que los objetos materiales se componen de átomos) había estado presente durante dos mil quinientos años en la cultura occidental (todavía en Newton, por ejemplo) como una mera especulación. Solo tras las investigaciones cuantitativas de los químicos del siglos XIX, como Dalton, Proust y Avogadro, el atomismo se convirtió en una hipótesis científica contrastable empíricamente. La

confirmación de la teoría cinética de los gases de Maxwell y Boltzmann (basada en los átomos) incrementó su plausibilidad. Desde el inicio del siglo XX se empezaron a hacer experimentos que involucraban directamente a los átomos, con lo cual la teoría atómica fue pronto universalmente aceptada. Sin embargo, entre 1900 y 1925 la experimentación con los átomos reveló una serie de efectos físicos inesperados e incompatibles con las leyes de la mecánica clásica, como la radiactividad, el efecto fotoeléctrico o la radiación del cuerpo negro. Se descubrió que cada tipo de átomo solo absorbe y emite radiación electromagnética en unas pocas longitudes de onda, y no en las intermedias, lo cual no tenía explicación en el contexto del electromagnetismo clásico. Además, los electrones que giran en torno al núcleo tendrían —según la teoría clásica— que perder energía hasta caer en el núcleo, atraídos por su carga eléctrica positiva, pero eso no ocurre. Mientras permanecen en un estado estacionario, no emiten radiación ni pierden energía. Cuanto más estudiaban los físicos experimentales la radiación de los átomos, tanto más claro quedaba que la mecánica y el electromagnetismo clásicos no servían para explicarla. Una nueva e incompatible teoría se hacía necesaria para dar cuenta de lo que se iba averiguando acerca del mundo atómico. Esa teoría sería la mecánica cuántica, así llamada porque incorporaba el descubrimiento de Planck de que la energía se transmite en paquetes discretos discontinuos o cuantos.

En 1925-1926 fue creada la mecánica cuántica, y además por partida doble: por un lado, Heisenberg, Born y Jordan en Göttingen (con la posterior ayuda de Pauli y Dirac) la desarrollaron en forma de mecánica de matrices y, por otro lado, Schrödinger en Zürich la presentó en forma de mecánica ondulatoria (mediante su ecuación de la función de onda). La concepción de Heisenberg y Born era más positivista, centrándose en las correlaciones entre 'observables', y renunciando a ofrecer imagen alguna de la estructura inobservable del átomo. La posición y el momento de los electrones pasaban a ser representados por matrices, por lo que su multiplicación no era conmutativa. Sin embargo, a pesar de todas sus diferencias (y de la mutua repugnancia que cada versión inspiraba a los autores de la otra), pronto se mostró (ya por el mismo Schrödinger) que ambas versiones, aunque muy diferentes en su inspiración y presenta-

ción, eran matemáticamente equivalentes en el sentido de predecir los mismos resultados para los mismos experimentos.

Hilbert —el gran promotor del método axiomático en la matemática— pensaba que también sería conveniente axiomatizar parcelas de la física, a fin de aclarar su estructura matemática. Incluso incluyó esta tarea en su famosa lista de problemas abiertos presentada en el congreso mundial de matemáticos celebrado en París en 1900. Von Neumann llegó a Göttingen en plena revolución cuántica. Enseguida empezó a trabajar con Hilbert en la tarea de encontrar una formalización más rigurosa y abstracta de la mecánica cuántica, de la cual las versiones de Heisenberg y de Schrödinger serían meras representaciones especiales. Von Neumann encontró en trabajos previos de Hilbert las herramientas que necesitaba. Hilbert había sido el pionero en el estudio de las ecuaciones con una infinidad de variables y de los espacios de infinitas dimensiones. Von Neumann utilizó como estructura matemática básica un espacio vectorial complejo de infinitas dimensiones al que llamó 'espacio de Hilbert' en honor de su maestro. Aunque Dirac había expuesto ya su formalismo antes que von Neumann, la formalización de von Neumann resultó ser la más rigurosa, y la más abierta a nuevas extensiones de la mecánica cuántica (como la teoría cuántica de campos). Aunque otras formalizaciones alternativas han sido propuestas desde entonces, todas ellas han de ser de algún modo traducibles a la formulación del espacio de Hilbert, que es la que permite obtener todas las predicciones verificables.

En poco más de un año, von Neumann pudo llevar a cabo su tarea. Ya en 1927 publicó su formalismo de los espacios de Hilbert para axiomatizar la mecánica cuántica en una serie de tres artículos, el primero de los cuales se titulaba «Mathematische Begründung der Quantenmechanik» (Fundamentación matemática de la mecánica cuántica), y los otros dos aparecieron bajo el título «Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik» (Construcción probabilista de la mecánica cuántica). Otros dos artículos publicados en 1929 acabaron de redondear la presentación, atando cabos sueltos y demostrando ciertos resultados matemáticos relevantes: «Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren» (Teoría general de los valores propios de los operado-

res funcionales hermíticos) y «Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren» (Sobre el álgebra de los operadores funcionales y la teoría de los operadores normales). Finalmente reunió y amplió el contenido de todos estos artículos en un libro sistemático, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica), publicado en 1932, y convertido desde entonces en la formulación canónica de la mecánica cuántica. A partir de ese momento, von Neumann (que solo contaba veintinueve años) adquirió un prestigio inmenso entre los físicos teóricos.

Su formulación de la mecánica cuántica se basa en la estructura matemática del espacio de Hilbert. A cada estado de un átomo o partícula o sistema cuántico en general corresponde un vector unitario de ese espacio. Ya en la teoría de Heisenberg el estado de un átomo se representaba por una infinidad de números, y de ahí sacó von Neumann la idea de representarlo como vector del espacio de Hilbert. La mecánica cuántica requiere, además de estados de átomos, (magnitudes) observables, que von Neumann representó mediante operadores, que transforman vectores (estados) del espacio de Hilbert en otros vectores del mismo espacio. El orden en que se aplican los operadores importa, por lo que su concatenación no es conmutativa. Un caso especial es la no-conmutatividad de los operadores de posición y momento, señalada por Heisenberg.

Niels Bohr había reflexionado filosóficamente acerca de la complementariedad (por ejemplo, entre onda y partícula) y sobre la poco clara relación entre sistema cuántico, instrumento de medida clásico acoplado y observador. Von Neumann, en cambio, trató de resolver este problema filosófico mediante la extensión del formalismo cuántico hasta incluir también el proceso de medición. Para ello aceptó la hipótesis irrealista pero simplificadora de que el proceso de medida es instantáneo. Von Neumann consideraba que el sistema cuántico está sometido a dos tipos de cambios: un cambio determinista gobernado por la ecuación de movimiento de Schrödinger y un cambio indeterminista e incontrolable que se produce instantáneamente, de un salto, durante la medición. Precisamente el postulado de proyección de von Neumann tiende a dar cuenta de ese salto. Según Bohr, el observador hace afirmaciones objetivas (formuladas en el lenguaje de la física clásica) acer-

ca del aparato de medida y lo que este aparato señala. Según von Neumann, el observador solo puede describir sus propias observaciones. El aparato de medida es una mera extensión del observador. Además, el mero hecho de que el observador conozca el sistema cuántico y el aparato de medida transforma la realidad física, cambia el estado del sistema+aparato, lleva a cabo la 'reducción de la superposición' de estados (equivalente al colapso de la función de onda). A pesar de las dificultades de interpretación, que se prestan al idealismo y solipsismo, se trata de la primera teoría cuántica rigurosa de la medición. De todos modos, ni von Neumann ni nadie ha logrado dar una descripción e interpretación satisfactoria del proceso de medición. El sistema cuántico estudiado sigue describiéndose según las leyes de la mecánica cuántica, mientras que el aparato de medida sigue siendo descrito en términos de la mecánica clásica. El interfaz entre una y otra, el salto a un valor propio del observable, el colapso de la función de onda, la reducción de la superposición de estados, que se da en la medición, sigue sin entenderse adecuadamente. Es lo que se llama el problema de la medición, un problema que todavía hoy sigue abierto.

Von Neumann axiomatizó el espacio de Hilbert y formalizó en él la mecánica cuántica. Otros desarrollos posteriores violan alguno de sus axiomas o no aceptan el postulado de proyección. Algunos autores han propuesto formalizaciones alternativas o álgebras abstractas más generales. El mismo von Neumann, junto con G. Birkhoff, desarrolló en 1936 una teoría más general bajo el nombre de lógica cuántica: «The Logic of Quantum Mechanics» (La lógica de la mecánica cuántica), aunque su aplicabilidad resultó ser menor.

El espacio de Hilbert

$\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert si y solo si cumple estas condiciones o axiomas:

(1) $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo.

$\mathcal{H}=(H, +, 0)$ es un grupo abeliano. Los elementos de H se llaman vectores. $\mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos, también llamados en este contexto escalares. Hay una operación externa de multiplicación de escalares por vectores: $\mathbb{C}\times H\rightarrow H$, que cumple para cada a, $b\in\mathbb{C}$ y cada $\varphi, \psi\in H$: (*i*) $a(\varphi+\psi)=a\varphi+a\psi$; (*ii*) $(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi$; (*iii*) $a(b\varphi)=(a\cdot b)\varphi$; (*iv*) $1\varphi=\varphi$.

(2) $\mathcal{H}$ es un espacio con producto interno.

Un producto interno | en $\mathcal{H}$ es una función que a cada par de vectores φ,ψ aplica un escalar $<\varphi|\psi>$, llamado el producto interno de φ y ψ, es decir, $|:H\times H\rightarrow\mathbb{C}$, y que además cumple las siguientes condiciones:

(*i*) $<\psi|\psi>\geq 0$
(*ii*) $<\psi|\psi>=0$ si y solo si $\psi=0$
(*iii*) $<\varphi|\psi>=<\psi|\varphi>^*$ [donde c^* es el conjugado de c. Recuérdese que el conjugado c^* de un número complejo $c=a+bi$ es el número complejo $a-bi$, donde $i=\sqrt{-1}$].
(*iv*) $<\varphi+\psi|\chi>=<\varphi|\chi>+<\psi|\chi>$
(*v*) $<a\varphi|\psi>=a<\varphi|\psi>$

Dos vectores φ, ψ son ortogonales si su producto interno es nulo, es decir, si $<\varphi|\psi>=0$.

Este producto interno induce una norma $||\varphi||=\sqrt{<\varphi|\varphi>}$. La norma es una generalización de la noción de longitud de un vector.

(3) Hay un número infinito de vectores linealmente independientes en $\mathcal{H}$.

(4) $\mathcal{H}$ es completo.

Una sucesión de vectores s: $\mathbb{N}\rightarrow H$ es convergente si a la larga sus valores se estabilizan o convergen, es decir, si la diferencia $||s(n)-s(m)||$ casi desaparece a partir de cierto punto, es decir, si para cada número racional positivo ε, por pequeño que sea, hay un número natural k tal

que para cualesquiera números naturales n, $m>k$: $\|s(n)-s(m)\|<\varepsilon$. Que $\mathcal{H}$ es completo (respecto a distancia) significa que todas las sucesiones convergentes de vectores de H tienen vectores de H como límites. El espacio de Hilbert es así un espacio normado completo, es decir, un espacio de Banach.

(5) $\mathcal{H}$ es separable.

Una base ortonormal del espacio vectorial H es un conjunto B de vectores unitarios mutuamente ortogonales, tal que cada vector de H es una combinación lineal de vectores de B. Todas las bases del espacio H tienen la misma cardinalidad, que es la dimensión (el número de dimensiones) de ese espacio. Dos espacios de Hilbert de igual dimensión son isomorfos. $\mathcal{H}$ es separable si contiene un subconjunto infinito numerable de vectores denso en $\mathcal{H}$, si tiene bases numerables. Por tanto, y teniendo en cuenta (3), un espacio de Hilbert tiene dimensión $\aleph_0$, por lo que podemos formar en él combinaciones lineales de un número infinito de vectores.

El estado de un sistema cuántico es el compendio de todas sus características en un instante dado. Los estados del sistema cuántico son representados por vectores unitarios (vectores φ tales que $<\varphi|\varphi>=1$ y, por tanto, $\|\varphi\|=1$) del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Así como los vectores pueden ser sumados, los estados cuánticos pueden también ser sumados o combinados linealmente, dando lugar a la superposición de varios estados cuánticos, que es otro estado cuántico.

La evolución temporal del estado φ está descrita por la ecuación de Schrödinger para el estado φ

$$i\hbar\partial\varphi/\partial t=H\varphi$$

donde $i=\sqrt{-1}$, $\hbar=h/2\pi$ (donde h es la constante de Planck) y H es el hamiltoniano que representa la energía total del sistema. Otra fórmula de muy distinto carácter (estadístico) nos dice, dado el estado en que se encuentra el sistema, uno de sus observables y uno de los valores

propios de ese observable, cuál es la probabilidad de que la medición de ese observable determinado en ese estado dé como resultado ese valor propio.

Un operador Q es una transformación lineal del espacio de Hilbert, Q: $H \rightarrow H$. El adjunto $Q\dagger$ de un operador lineal Q está definido por la ecuación $<\varphi|Q\dagger(\psi)> = <\psi|Q(\varphi)>^*$ para cualesquiera $\varphi, \psi \in H$. Un operador Q es autoadjunto si es igual a su adjunto, es decir, si $Q = Q\dagger$. Los operadores autoadjuntos tienen espectros (conjuntos de valores propios) que constan solo de números reales. Un operador P es acotado si hay un número positivo n tal que $||P\varphi|| \leq n||\varphi||$ para todo $\varphi \in H$. Un operador autoadjunto y acotado se llama hermítico. Los observables (es decir, las propiedades experimentalmente medibles) del sistema cuántico son representados por operadores hermíticos. Un operador hermítico Q idempotente, es decir, tal que $QQ = Q$, es un operador de proyección o proyector.

Un observable (una magnitud experimentalmente medible) de un sistema cuántico se representa mediante un único operador hermítico en su espacio de Hilbert. El espectro del operador contiene todos los posibles valores que pueden obtenerse como resultado de la medición de ese observable. Los estados propios de un observable Q son los estados φ, tales que $Q(\varphi) = c\varphi$ para algún número complejo c. Dos operadores P y Q conmutan si y solo si $PQ = QP$. Dos observables son compatibles si sus correspondientes operadores conmutan. Si no conmutan, los observables son incompatibles. Los observables incompatibles (como posición y momento) no pueden tener estados propios simultáneos.

En América

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX tuvo lugar un considerable desarrollo económico en los Estados Unidos, impulsado por la gran libertad de mercado y la dinámica actividad de muchos empresarios ambiciosos, con frecuencia probres emigrantes que lograban ama-

sar enormes fortunas a base de iniciativa y tesón. Esas fortunas superaban las posibilidades de consumo individual o familiar y con frecuencia acababan siendo devueltas a la sociedad en forma de donaciones o fundaciones filantrópicas. Andrew Carnegie, por ejemplo, emigró a América a los doce años junto a sus padres, tejedores escoceses en paro. Con el tiempo, el espabilado joven acabó convirtiéndose en el hombre más rico del mundo, cuando vendió su gran empresa siderúrgica por 480 millones de dólares, la mayor parte de los cuales (350 millones) dedicó a fundar instituciones científicas, museos, salas de conciertos y 2.500 bibliotecas públicas. Otros muchos empresarios famosos, como los Ford o Rockefeller, participaron también en esa tradición americana de filantropía ilustrada. Y no solo se dearrolló la industria, sino también el comercio. Entre los primeros y más famosos grandes almacenes americanos hay que mencionar los de Marshall Field en Chicago y los de R. H. Macy en Nueva York. Marshall Field fue también un filántropo, que entre otras cosas donó a su ciudad el magnífico Museo Field de Historia Natural.

Hacia 1925, Louis Bamberger y su hermana, dueños de otros grandes almacenes, decidieron ponerlos en venta y dedicarse a la filantropía. En 1929, justo antes del derrumbe de la bolsa, los vendieron a R. H. Macy. Los Bamberger se pusieron en contacto con Abraham Flexner, un conocido experto en temas de enseñanza superior e investigación y hermano del director del Rockefeller Institute for Medical Research, para que los aconsejase. Aunque la primera idea de ellos era la de fundar otra escuela de medicina, Flexner los convenció de que lo mejor sería crear un centro de estudio e investigación de nuevo cuño, donde las mejores mentes pudiesen dedicarse en total libertad a desarrollar sus propios pensamientos. Una vez aceptado el plan, los Bamberger querían situar la institución en la capital (Washington, D.C.), pero Flexner los convenció de que sería mejor situarla en un lugar más tranquilo, como Princeton. Se trataba de crear un «paraíso para sabios», un lugar donde los genios más creativos pudieran dedicarse a su actividad intelectual sin el incordio y la distracción de las clases y las reuniones. Se trataría de una institución dedicada al avance del pensamiento, proporcionando a sus miembros toda la tranquilidad, la liber-

tad y los medios necesarios. El sueño de Flexner se hizo realidad con la incorporación legal (como fundación filantrópica privada) en 1930 de ese paraíso para sabios: el Institute for Advanced Study (IAS) de Princeton, cuyo primer director fue Flexner.

Aunque la física experimental ya había logrado un notable desarrollo en los Estados Unidos a finales de los años veinte, todos los progresos en el campo de la física teórica se estaban realizando en Europa. Por ello había un gran interés en elevar el nivel teórico, trayendo a América a algunos de los grandes físicos matemáticos europeos. La Universidad de Princeton había obtenido fondos para ello. El físico Karl Compton y el matemático Oswald Veblen fueron los encargados de fichar a cerebros famosos. Einstein y Heisenberg recibieron ofertas, pero las rechazaron. En 1929 invitaron a von Neumann y a su amigo Wigner a ir a Princeton durante un semestre. Von Neumann aceptó y pasó un semestre en la Universidad de Princeton con su novia Mariette Koevesi, con la que luego se casó, y de la que tuvo una hija. A John le encantó América, su dinamismo y optimismo, que congeniaba tan bien con el suyo, su informalidad y amplitud de oportunidades. Durante los años siguientes alternaba entre Alemania y Estados Unidos, pasando un semestre en Berlín y otro en Princeton.

En 1933, tras la llegada al poder de los nazis, todos los científicos judíos (muchos de los cuales formaban la flor y nata del mundo académico alemán) fueron expulsados de sus respectivos institutos y universidades. Los que ya estaban medio establecidos en América, como von Neumann, pusieron todo su interés en encontrarles trabajo allí, cosa nada fácil, dado el periodo de depresión por el que atravesaba la economía americana. El Instituto de Estudios Avanzados (IAS) de Princeton empezó a funcionar en 1933. Se pensó que lo más conveniente sería poner el acento inicial en la física y la matemática, donde la excelencia era especialmente fácil de evaluar. Como primeros profesores del IAS fueron nombrados Albert Einstein, Oswald Veblen, John von Neumann, Hermann Weyl y James Alexander. Otros, como Kurt Gödel, fueron invitados como miembros temporales. En los años siguientes, otros muchos excelentes pensadores y científicos acabaron recalando allí.

Durante los años treinta, von Neumann hizo avanzar considerablemente varias ramas de la matemática pura, como la teoría ergódica, la teoría de la medida, la teoría de los grupos topológicos, la teoría de retículos y la teoría de operadores.

La casa de von Neumann en Princeton pronto se convirtió en el centro de las fiestas sociales en aquella tranquila ciudad. De todos modos, su relación con su mujer, Mariette, se fue deteriorando. En 1937, ella decidió separarse de él, se llevó a su hija y se casó con un físico experimental, Horner Kuper. En 1938, cuando la Segunda Guerra Mundial estaba a punto de estallar, von Neumann hizo un viaje por Europa dando conferencias, discutiendo con Niels Bohr en Copenhague, desarrollando una teoría espectral unitaria para operadores no hermíticos y visitando a su familia en Hungría. También quiso aprovecharlo para volver a casarse, esta vez con su amiga húngara Klara Dan. El problema es que ella ya estaba casada, no tenía visado de entrada en Estados Unidos y la guerra podía estallar en cualquier momento. Finalmente, el 29 de octubre, Klara obtuvo el divorcio, unos días después se casaron y enseguida marcharon para Le Havre, donde embarcaron hacia Nueva York. La casa de von Neumann en Princeton de nuevo se convirtió en un centro de fiestas y *parties*. Von Neumann se casó, pues, dos veces, ambas con mujeres húngaras: en 1929 con Mariette Koevesi y en 1938 con Klara Dan. Con cada una de ellas tuvo una hija. Su hija con Klara, Marina, a la que tenía gran afecto, fue más tarde una eminente economista y tuvo una exitosa carrera en el mundo de la gran empresa.

Personalidad e inteligencia

Von Neumann era siempre frío y racional, pero al mismo tiempo sociable, amable, cortés y abierto con todo el mundo. No era nada atlético y evitaba cualquier trabajo físico. Comía demasiado, y le encantaba la buena mesa y la cocina mexicana. Tenía un temperamento chispeante y desenfadado. Le gustaban los chistes verdes, sobre todo si rimaban. Le gustaba el sexo y las mujeres. Cuando entraba en una oficina, si había una secretaria atractiva, no vacilaba en inclinarse para

tratar de mirar por debajo de su falda. Le gustaban las fiestas y trataba de organizar en su casa las más divertidas de la ciudad. De todos modos, si se alargaban demasiado, se retiraba un par de horas a su estudio a trabajar, pues en realidad lo que más le gustaba de todo era pensar, que es en lo que consistía su trabajo.

Von Neumann gozaba pensando y, en especial, pensando matemáticamente. Su mayor goce consistía en la creación de pruebas, teorías y soluciones elegantes. Valoraba extraordinariamente la belleza y la elegancia de las pruebas y las teorías, y también valoraba mucho la libertad que proporcionaba el libre juego con símbolos y conceptos.

El aspecto más llamativo de von Neumann era su portentosa inteligencia, que dejaba boquiabiertos a cuantos lo trataban. La facilidad con que entendía los problemas y la rapidez con que los solucionaba era pasmosa. Su mente funcionaba a una velocidad fantástica. Sus colegas siempre lo describían como «la mente más rápida que nunca he conocido». Un típico comentario de un colega era: «Discutí el problema con von Neumann, y en cinco minutos hizo avanzar mi investigación tanto como yo habría logrado en cinco meses»[2]. Eugene Wigner comentó posteriormente que (ante la mente de von Neumann) «uno tenía la impresión de un instrumento perfecto cuyos engranajes estaban fabricados para encajar con una exactitud de una milésima de pulgada». Muchos lo consideraban una especie de semidiós intelectual. El premio Nobel de Física Hans Bethe comentó tras su muerte: «A veces me he preguntado si un cerebro como el de John von Neumann no indica una especie superior a la especie humana».

A su increíble velocidad de comprensión y cálculo, von Neumann unía una memoria prodigiosa. Sabía recitar de memoria gran parte de los libros que había leído. Daba sus conferencias sin papeles ni notas.

Se concentraba en un problema hasta haber considerado todos sus aspectos, e inmediatamente se le ocurría la solución más elegante y acertada, que a continuación se ponía a escribir. En cuanto se veía con-

[2] Cita en Steve Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener*, the MIT Press, 1980, pág. 129.

frontado a un problema inédito, enseguida sabía enfocarlo del modo adecuado y buscaba la notación y representación que más fácilmente contribuiría a su solución. A diferencia de otros matemáticos, no pensaba espacialmente, sino de un modo lógico y secuencial.

Cuando se enfrentaba a problemas filosóficos, trataba de solucionarlos aclarando los términos empleados en su formulación, traduciéndolos a sistemas lógicos y estructuras matemáticas. Pensaba que todo asunto tiene una esencia, que se expresa en su estructura matemática subyacente. Comprender a fondo una parcela del mundo empírico consiste en descubrir y describir esa estructura abstracta que la subyace y que explica sus manifestaciones. Este platonismo lógico se aprecia en su enfoque de todo tipo de cuestiones, como el problema de la medición de la mecánica cuántica, según vimos.

Esa característica capacidad e interés de von Neumann por analizar y descubrir la estructura matemática de muy diversas teorías, situaciones y actividades, describiéndola en forma axiomática precisa, lo llevó a analizar sistemas muy distintos, desde la meteorología y la predicción del tiempo hasta los juegos competitivos. Esta última preocupación lo condujo a crear la teoría de los juegos.

Teoría de juegos

Ya desde su juventud John von Neumann se había interesado por el tratamiento matemático de los juegos. En 1928 (a los veinticinco años) publicó en la revista *Mathematische Annalen* su seminal artículo «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele» (Sobre la teoría de los juegos de sociedad). Aunque Émile Borel fue el primero (en 1921) en someter los juegos de competición a análisis matemático, en estudiar los juegos de suma cero entre dos personas y en subrayar la importancia de las estrategias mixtas, fue von Neumann quien en 1928 consideró la teoría en toda su generalidad, probó el teorema fundamental del minimax y puso las bases de lo que ahora se considera la teoría de juegos. Más tarde volvió a ocuparse con extensión y profundidad de todos los temas de la teoría, incluyendo la teoría de la

utilidad. Fruto de ello fue la aparición en 1944 de su gran libro (en colaboración con Morgenstern) *The Theory of Games and Economic Behavior* (Teoría de juegos y de la conducta económica), en el que presenta esta nueva rama de la matemática ya completamente desarrollada.

Se trata de juegos deterministas y competitivos entre dos o más personas. Los juegos (por ejemplo, entre dos personas) son de suma cero cuando la utilidad global es una cantidad fija: lo que uno de los jugadores gana, el otro lo pierde, y viceversa. Se supone que cada jugador conoce todos los resultados posibles del juego, que tiene preferencias claras entre ellos y que cada uno de los dos jugadores han examinado y analizado todas las estrategias posibles abiertas ante ellos antes de empezar a jugar. Von Neumann probó que para una gran clase de juegos de suma cero entre dos personas con información perfecta existe una única solución óptima del juego (teorema del minimax). También probó que en los juegos con información imperfecta no hay una estrategia óptima para una única jugada, pero sí existe para el promedio de las jugadas, e incluye la mezcla aleatoria de diversas estrategias distintas. Von Neumann probó su teorema general del minimax, piedra angular de la teoría de juegos, mediante una prueba matemáticamente muy sofisticada, que hacía uso de resultados profundos del álgebra y la topología. También estudió los juegos de suma cero entre tres o más personas, en que se pueden formar alianzas, analizando qué coaliciones se pueden formar y qué provecho puede sacar cada jugador formándolas.

Los resultados de la teoría de juegos no solo se refieren a los juegos de salón o de naipes, sino a todo tipo de situaciones en que se dan preferencias distintas, conflictos de intereses y posibilidades de desarrollar estrategias para competir con un adversario. Los principios que rigen los juegos más simples resultan ser aplicables en situaciones muy diversas, como la economía o la guerra. Incluso la investigación científica se ha entendido a veces como un juego del investigador contra el universo.

COMPUTADORES

Aunque von Neumann intervino en el diseño de los primeros computadores gigantes, su enorme importancia en la historia de la informática radica en que fue el creador de la arquitectura de los computadores programables modernos y el inventor de la idea misma del *software.*

En 1944, el matemático Herman Goldstine contrató a von Neumann como asesor para el diseño de computadores digitales en la escuela Moore de Ingeniería. Antes de su llegada, todos pensaban solo en los aspectos físicos y materiales del diseño, por lo que los avances eran lentos. Fue él quien introdujo el punto de vista formal y lógico en el diseño de la computación, lo que acabó conduciendo a la concepción del programa *(software)* como algo distinto del soporte material *(hardware).*

Se suele considerar que la época de la computación electrónica empezó con la gran máquina computadora ENIAC, construida en la escuela Moore para calcular la trayectoria de los proyectiles y presentada al público en febrero de 1946. En esta máquina cualquier cambio de programa todavía implicaba alterar la configuración de las válvulas, es decir, cambiar la estructura física de la máquina. Aunque von Neumann se había incorporado al programa de construcción de la ENIAC, pronto propuso su nueva idea de computador con memoria y programas almacenables y diseñó el EDVAC, que acabó construyéndose en Princeton. Von Neumann introdujo la arquitectura actual de los computadores. Su idea de separar el *software* del *hardware,* establecida teóricamente en 1945, fue implementada por primera vez en la máquina EDVAC, que ya poseía una memoria interna en que podían almacenarse o borrarse diversos programas. Desde entonces, todos los computadores incorporan la arquitectura de von Neumann. En 1951 salió al mercado el UNIVAC, el primer computador comercial, con 5.000 válvulas. En los años cincuenta las válvulas fueron siendo sustituidas por los transistores (inventados en 1947). Más tarde los transistores fueron reemplazados por sucesivas generaciones de microprocesadores cada vez más eficientes y pequeños. Pero, fuera cual fuera la tecnología em-

pleada, todos estos computadores implementaban la arquitectura de von Neumann.

Autómatas autorreproductores

Su ocupación con el diseño de los primeros computadores modernos condujo tanto a von Neumann como a Norbert Wiener a establecer comparaciones formalmente precisas entre computadores y cerebros o, en general, entre máquinas y organismos. Wiener, interesado por el autocontrol, desarrolló la cibernética. Por los mismos años, von Neumann centró su interés en la autorreproducción.

Sin duda la autorreproducción es una de las características fundamentales de los seres vivos. ¿Puede haber otras cosas que se autorreproduzcan? ¿Es posible desarrollar una teoría general de la autorreproducción, que abstraiga de las contingencias de los organismos vivos terrestres? Hacia 1949, John von Neumann recogió este reto, que él mismo se había planteado, y le dio respuesta con el desarrollo de su teoría de los autómatas autorreproductivos.

Von Neumann quería abstraer la pura estructura lógica del proceso de reproducción mismo, independientemente de su realización material concreta en los sistemas biológicos. ¿Qué tipo de organización formal basta para que un autómata controle su propia conducta de tal modo que se reproduzca a sí mismo? Primero, von Neumann diseñó el modelo cinemático de una máquina que, flotando sobre un mar de elementos primitivos, sería capaz de ensamblar una copia de sí misma. Este modelo cinemático fue más tarde abandonado a favor de un modelo sin partes, basado en la noción de un autómata celular. En cualquier caso, von Neumann concluyó que en principio es posible construir máquinas que puedan reproducirse a sí mismas. Estos intentos de von Neumann fueron luego continuados por otros. En 1970, John Conway usó un tipo muy simple de autómata celular para diseñar un juego de vídeo llamado *Life* (vida), que transcurre a base de pasos discretos en la pantalla del computador. Eventualmente, patrones autorreproductivos aparecen en la pantalla y empiezan a proliferar. Otros desarrollos,

desde los algoritmos genéticos hasta los programas de 'vida artificial' proceden de la misma fuente.

Bomba de hidrógeno

Con el estallido de la Segunda Guerra Mundial, el gobierno americano, que previamente se había mantenido al margen de la investigación, puso en marcha grandes proyectos de una envergadura hasta entonces desconocida, relacionados con la guerra y provistos de enormes sumas de dinero. El más importante fue el proyecto Manhattan, dirigido por Robert Oppenheimer y dedicado a diseñar, desarrollar, construir y probar una bomba atómica en un breve plazo de tiempo y con el máximo secreto. A partir de 1943, von Neumann estuvo completamente implicado en el proyecto, y pasaba varios meses al año en el laboratorio de Los Álamos (New Mexico), donde se llevaban a cabo las investigaciones. Varios de los mejores físicos —Oppenheimer, Fermi, Teller, Wigner, ...— se habían reunido allí. Todos conocían y admiraban a von Neumann, al que acudían como a un guru, a que les solucionase sus problemas matemáticos y les analizase sus dificultades con su lógica implacable. Además, von Neumann era de trato siempre amable y no tenía enemigos. Su contribución específica más notable fue el diseño del método de implosión para detonar la bomba atómica, que se sometió a prueba en Alamogordo y se usó para detonar la bomba atómica lanzada sobre Nagasaki.

En Los Álamos, von Neumann se hizo también muy amigo del general Groves, jefe administrativo del proyecto Manhattan, que lo incluyó en el círculo de sus hombres de máxima confianza, en que no solo se discutían cuestiones técnicas, sino también decisiones estratégicas. A partir de ese momento, su implicación en el programa armamentista americano no hizo más que aumentar. En las apasionadas discusiones sobre la conveniencia de construir la bomba de hidrógeno, von Neumann se decantó a favor. También propuso la construcción de misiles balísticos intercontinentales, capaces de transportar las superbombas hasta la misma Unión Soviética, y encabezó el comité encarga-

do de diseñarlos. Intervino en el uso de computadores para llevar a cabo los cálculos necesarios para construir la bomba de hidrógeno y para reducir su tamaño, de tal manera que pudiera servir de cabeza de un misil.

Oppenheimer se opuso rotundamente a la construcción de la bomba de hidrógeno, por los peligros que implicaba. En 1954, durante la histeria maccarthysta, Oppenheimer fue investigado como sospechoso de traición. Von Neumann, que no compartía sus ideas políticas, sin embargo testificó a favor de Oppenheimer, defendiendo públicamente su integridad y lealtad, lo que le ganó el respeto de la comunidad científica.

Todos los «húngaros geniales» de la generación de von Neumann (excepto Gabor) estuvieron implicados en el desarrollo de la bomba atómica. Leo Szilard tuvo la idea de la reacción nuclear en cadena. Szilard, junto con los también húngaros Wigner y Teller, convencieron a Einstein de que enviara una carta (escrita por Szilard) al presidente F. D. Roosevelt, alertándolo del peligro de que Alemania se adelantase en la construcción de la bomba atómica, que tuvo como consecuencia la puesta en marcha del proyecto Manhattan. Tras la explosión de una bomba atómica en Hiroshima, Szilard tuvo dudas morales, se retiró de la física atómica y en 1946 inició una nueva carrera como profesor de biofísica en la Universidad de Chicago. Eugene Wigner desarrolló en 1936 su teoría de la absorción del neutrón y propuso la conservación de la paridad. Colaboró en Chicago con Szilard y Fermi en el diseño de la bomba atómica. Edward Teller trabajó durante la Segunda Guerra Mundial en la construcción de la bomba atómica en Los Álamos. En los años cincuenta propugnó (frente a Oppenheimer y otros) el desarrollo de la bomba de hidrógeno, de la que a veces se le considera como «el padre». La primera explosión de una bomba H tuvo lugar en una isla del Pacífico en 1952. En la época maccarthysta, Teller denunció a Oppenheimer durante la investigación a que fue sometido, lo que lo cubrió de oprobio ante la comunidad científica.

En 1954, el almirante Strauss ofreció a von Neumann, al que admiraba, un puesto de comisario de la Energía Atómica, que es el puesto más alto que un científico podía alcanzar en el gobierno de los Estados

Unidos. La Comisión de la Energía Atómica, compuesta por cinco comisarios, tenía responsabilidad directa sobre todos los laboratorios y líneas de investigación nuclear civil y militar, sobre el desarrollo de las armas atómicas, sobre la energía nuclear, sobre las minas de uranio, etc. Los comisarios eran nombrados irrevocablemente por un plazo de cinco años, por lo que podían luego actuar con gran independencia de criterio, pues ni el presidente ni el Congreso podían meterse con ellos. En enero de 1955 el nombramiento de von Neumann como comisario fue propuesto al Senado. Von Neumann tuvo que someterse a los interrogatorios de los senadores, que finalmente aprobaron su nombramiento. En la primavera de 1955, von Neumann se mudó con su familia a Washington. En 1956 recibió la primera medalla Fermi de manos del presidente Eisenhower. De todos modos, solo pudo desempeñar su función de comisario atómico a pleno rendimiento durante un año, pues en 1956 empezó a manifestarse su enfermedad.

La muerte de von Neumann

Von Neumann siempre había tenido éxito en la vida y no estaba nada preparado para morir. Incluso parecía pensar que era invulnerable. Conducía los coches con alegre despreocupación y se salvó de milagro de varios accidentes. Por ello, todos sus amigos se quedaron muy sorprendidos cuando se enteraron de que von Neumann estaba muriendo de cáncer (con solo cincuenta y tres años de edad). Ninguno pensaba que él pudiera morir.

Von Neumann siempre había bagatelizado las consecuencias de los ensayos nucleares sobre la salud humana. Él mismo, confiado en su invulnerabilidad y optimismo, se había expuesto al peligro radiactivo, pasando varios meses en el laboratorio de Los Álamos cada año y acudiendo a observar personalmente los ensayos de las bombas atómicas. Al final contrajo un cáncer de huesos, que produjo metástasis en otros lugares de su cuerpo. Lo descubrió en verano de 1955, cuando se cayó al resbalar en un pasillo y sintió dolores en el hombro izquierdo. Durante un tiempo von Neumann no se dejó intimidar, y siguió trabajan-

do a ritmo trepidante y cumpliendo sus obligaciones como comisario de la Energía Atómica. Sin embargo, poco a poco la enfermedad siguió avanzando. Ya no bastaban las cuatro o cinco horas de sueño. Pronto ya no podía andar, sino que tuvo que habituarse a la silla de ruedas. A mediados de 1956 una reunión conjunta de la Comisión de Energía Atómica y de otra importante comisión asesora de la defensa de Estados Unidos que él presidía tuvo lugar en el hospital Walter Reed, en su habitación. En torno a su cama de enfermo se sentaban el secretario (ministro) de Defensa, los jefes del Estado Mayor Conjunto, del ejército, la marina y la fuerza aérea y otros políticos y asesores, todos ellos pidiéndole su consejo y escuchando sus opiniones con gran respeto.

Al final, el deterioro fue imparable. Él, que toda su vida había sido un judío ateo, de pronto buscó consuelo en un cura católico, el padre Strittmatter, que empezó a visitarlo regularmente. El terrible sufrimiento lo condujo al colapso mental. Sentía pánico y se pasaba las noches dando gritos de terror. Murió el 8 de febrero de 1957, a los cincuenta y tres años de edad.

5
KURT GÖDEL (1906-1978)

El territorio de la actual república de Chequia (que abarca las tradicionales regiones de Bohemia, en torno a Praga, y Moravia, la cuenca del río Morava) estaba poblado desde el siglo V por un grupo de eslavos, los checos. Al final de la Edad Media numerosos artesanos y mercaderes alemanes se establecieron en sus incipientes ciudades. Desde entonces Chequia siempre estuvo habitada por una mayoría de checos y una minoría de alemanes, además de algunos eslovacos, húngaros, judíos y otros grupos étnicos. A principios del siglo XVII la mayoría de la población y de los nobles checos eran ya protestantes y resistieron la presión del imperio de los Habsburg para que se convirtieran al catolicismo. Su rebelión fue la chispa que encendió la Guerra de los Treinta Años, que asoló Europa central entre 1618 y 1648. Los checos perdieron su autonomía y su libertad religiosa. Sus tierras fueron incorporadas al dominio personal de la familia Habsburg y pasaron a ser gobernadas directamente desde Viena. En el siglo XIX los pinitos de liberalismo y el ejemplo alemán condujeron a una creciente industrialización del país y a un cierto florecimiento económico. La Primera Guerra Mundial no afectó especialmente a Chequia, pero dio lugar a un incremento de la agitación nacionalista y de su consiguiente represión por los austriacos. Tomas Masaryk y otros líderes nacionalistas checos y eslovacos huyeron del país y fundaron en París un Consejo Nacional Checoslovaco, que, tras la derrota austriaca, fue reconocido

por los aliados vencedores como gobierno de un nuevo Estado, Checoslovaquia. Masaryk se convirtió en su primer presidente y lo gobernó entre 1918 y 1935.

Los tres millones de alemanes y los dos millones y medio de eslovacos allí residentes no acababan de encontrarse a gusto en el nuevo estado, que no les concedía la autonomía prometida. Hitler animó a los alemanes de los Sudetes (zona del norte de Chequia lindante con Alemania) a solicitar cada vez más autonomía y finalmente a sublevarse, hasta que en septiembre de 1938 consiguió (en el acuerdo de Munich) que Gran Bretaña y Francia accedieran a la anexión del territorio de los Sudetes por el Estado alemán. A pesar de ello, Hitler no se dio por satisfecho, y en marzo de 1939 el ejército alemán ocupó el resto de Chequia, declarada protectorado alemán y sometida a la dictadura nazi y a la persecución antisemita. Tras la derrota alemana en la Segunda Guerra Mundial, en 1945, todos los alemanes de los Sudetes y de otras zonas de Checoslovaquia fueron violentamente expulsados de sus casas y obligados a abandonar el país, en una drástica operación de 'limpieza étnica'. El ejército ruso, que había ocupado el país, estableció en 1948 una dictadura comunista e intervino para mantenerla cada vez que los checos trataron de derribarla (1956, 1968).

A principios del siglo XX, el Imperio austrohúngaro de los Habsburg era una gran potencia centroeuropea. El asesinato (por un fanático serbio) del archiduque Franz Ferdinand, heredero de la corona, al provocar el ataque de Austria a Serbia, dio lugar a la Primera Guerra Mundial. Tras su derrota en la guerra, la monarquía de los Habsburg fue abolida y los diversos territorios del imperio obtuvieron su independencia, quedando Austria reducida al pequeño país actual. El tratado de Saint-Germain (1919) fijaba sus fronteras y prohibía la unión con Alemania. En 1920, Austria estrenó Constitución democrática, pero la virulencia partidista impidió su pacífico funcionamiento. Los dos partidos mayoritarios, el socialcristiano y el socialdemócrata, disponían de sus propias milicias armadas, que constantemente combatían entre sí en las calles. También el pequeño partido nazi, que propugnaba la unión con Alemania y el antisemitismo, tenía sus propios y agresivos comandos. Los conflictos callejeros condujeron al triunfo de

los socialcristianos. Su líder, el canciller Engelbert Dollfuss, disolvió el Parlamento en marzo de 1933 y estableció una dictadura clerical-conservadora. De todos modos, Dollfuss se oponía a la unión con Alemania, por lo que fue asesinado por los nazis en julio del año siguiente. A pesar de ello, los socialcristianos siguieron en el poder hasta que, en abril de 1938, Hitler (que era austriaco de nacimiento) ordenó al ejército alemán entrar en Austria. Tras la ocupación del país (bien recibida por la población), se proclamó el *Anschluss* (anexión) de Austria al Estado alemán. Enseguida los cuerpos represivos del estado nazi se pusieron a perseguir a judíos y disidentes. Tras la derrota alemana en la Segunda Guerra Mundial, Austria fue separada de Alemania y dividida en cuatro zonas de ocupación. En 1955 se acabó la ocupación y Austria recuperó su soberanía, aunque condicionada a su neutralidad.

INFANCIA Y EDAD ESCOLAR

Toda la familia de Gödel, tanto por lado paterno como materno, procedía de Bohemia y Moravia y, desde hacía varias generaciones, había vivido en Brno (en alemán, Brünn), la capital de Moravia, asociados primero a la industria local del cuero y luego a la industria textil.

Josef, el abuelo paterno de Kurt Gödel, se suicidó, por lo que su hijo Rudolf Gödel (1874-1929), padre de Kurt, fue educado por sus tías. En vista de la poca afición del niño por los estudios librescos, lo enviaron a la escuela profesional textil. El joven Rudolf, laborioso y competente en su oficio, pronto encontró empleo en la factoría textil de Friedrich Redlich, donde trabajó hasta su muerte. Allí fue muy apreciado, llegando a ser director de la empresa y al final incluso accionista y copropietario. En 1901 se casó con Marianne Handschuh (1879-1966), madre de Kurt, en Brno. Ella procedía también de una familia de tejedores renanos que había emigrado a Bohemia hacía tiempo. De este matrimonio nacieron dos hijos, Rudolf en 1902 y más tarde Kurt.

Kurt Gödel nació en Brno el 28 de abril de 1906. Tanto él como su hermano fueron bautizados en la congregación luterana alemana, aun-

que luego fueron educados como agnósticos. El dueño de la fábrica, Redlich, fue el padrino de Kurt.

Como tantos otros niños, Gödel preguntaba constantemente por el porqué de todo tipo de cosas y acontecimientos, como si todo tuviera una razón, causa o explicación. Como ha señalado su principal biógrafo, John Dawson, lo peculiar de Gödel fue que nunca abandonó ese punto de vista infantil[1]. Siempre siguió pensando que todo tiene un porqué, que el mundo es racional y explicable en todos sus detalles. A los cinco años sufrió una ligera neurosis de miedos, que luego superó. Toda su vida fue como un niño tímido y vulnerable, necesitado de protección, un superracionalista curioso e ingenuo. A los ocho años tuvo un ataque de fiebre reumática que enseguida se pasó, pero él siempre pensó que su corazón había quedado afectado, a pesar de que los médicos le aseguraban que no era así. Siempre fue un hipocondriaco.

En 1912, Kurt empezó a ir a la escuela primaria protestante de Brno. Al año siguiente los Gödel se mudaron a una nueva casa de tres pisos, recién construida. En 1916, Kurt terminó su formación en la escuela primaria e ingresó en el *Realgymnasium* de lengua alemana, en el que los protestantes como él eran una pequeña minoría del 5 por 100 de los alumnos, frente al 55 por 100 de católicos y el 40 por 100 de judíos. El *Realgymnasium* era un nuevo tipo de escuela secundaria mezclada, donde a la vez se enseñaban las ciencias y las letras, hasta entonces separadas en dos vías distintas de educación. Allí aprendió el sistema de taquigrafía de Gabelsberg, que luego emplearía como estudiante para tomar apuntes y más tarde para escribir sus notas, lo cual complicaría notablemente el trabajo posterior de los editores de sus manuscritos inéditos. Gödel obtenía calificaciones óptimas en todas las asignaturas. En conjunto, era un chico serio, tímido, introvertido e inteligente.

Gödel siempre se sintió como un miembro de la comunidad de lengua alemana de Moravia. Despreciaba a los nacionalistas checos y no sentía ningún interés por su lengua. Aprendió latín, francés e inglés, además del alemán, que era su lengua nativa. Nunca quiso aprender

[1] J. Dawson, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, pág. 1.

checo, y nunca se matriculó en los cursos optativos de checo, incluso después de que esta lengua fuera la oficial del nuevo Estado de Checoslovaquia, constituido tras la derrota austriaca en la Primera Guerra Mundial, y que incluía Brno, donde él vivía. En 1924 concluyó sus estudios secundarios y se trasladó a Viena. En 1929 adquirió la nacionalidad austriaca.

ÉPOCA DE ESTUDIANTE

En otoño de 1924, Gödel se trasladó a Viena, donde su hermano Rudolf ya llevaba cuatro años estudiando medicina. Kurt se matriculó en la Universidad de Viena con la intención de estudiar física. En cuanto llegó, se puso a vivir con su hermano, con quien siempre compartió el apartamento. De hecho, la cercanía de Brno (a poco más de cien kilómetros), donde vivían su padres, y la comodidad de compartir el apartamento con su hermano fueron razones decisivas para que Gödel nunca cambiase de universidad durante sus estudios, en contraste con la gran movilidad de los estudiantes brillantes (piénsese en von Neumann) de aquella época.

Entre 1924 y 1927 cursó estudios en la Universidad de Viena. Empezó estudiando física, pero las brillantes clases de Philipp Furtwängler sobre teoría de números lo atrajeron definitivamente hacia la matemática. Uno de sus profesores más señalados era Hans Hahn, un matemático polifacético y competente, interesado por las cuestiones de fundamentos, que acabaría convirtiéndose en su director de tesis. También le gustaba la filosofía. Siguió los cursos de Heinrich Gomperz sobre historia de la filosofía y participó en los seminarios de Moritz Schlick (fundador del Círculo de Viena), como el dedicado a la filosofía de la matemática de Russell.

Tras la derrota militar en la Primera Guerra Mundial, Viena era una gran ciudad venida a menos en lo político y económico, pero pletórica de vitalidad cultural y fermento intelectual. Gran parte de esa actividad tenía lugar en las reuniones de intelectuales en los cafés vieneses. Así empezó el Círculo de Viena (*Wiener Kreis*), aunque luego se

trasladó a locales de la Universidad. Moritz Schlick, Hans Hahn, Rudolf Carnap, Karl Menger y Herbert Feigl eran algunos de sus más asiduos componentes. Gödel pronto se sumó a ellos. La asistencia a las reuniones requería la invitación previa de otros miembros. Gödel asistió regularmente entre 1926 y 1928, inicialmente invitado por Hahn o Schlick.

En las reuniones del Círculo, Gödel escuchaba con atención lo que los otros decían, pero no solía tomar la palabra ni discutir él mismo, incluso cuando estaba en total desacuerdo, como ocurría con la concepción de Carnap sobre la matemática como 'sintaxis del lenguaje'. Carnap había sido invitado a venir a Viena como *Privatdozent* de filosofía, en gran parte por recomendación de Hahn. Enseguida se puso a participar activamente en las reuniones del Círculo, aproximadamente al mismo tiempo que Gödel, que asistía a sus clases sobre filosofía de la aritmética en la universidad y con quien tenía frecuentes conversaciones. Gödel también trabó amistad con Herbert Feigl, con quien daba largos paseos por las parques de Viena y tenía inacabables discusiones sobre lógica y epistemología hasta bien entrada la noche.

El matemático Karl Menger regresó a Viena en 1927 y al año siguiente fundó un 'coloquio matemático' propio, cuyas actas empezó a publicar como revista bajo el título de *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (Resultados de un coloquio matemático). Gödel asistió a sus clases de teoría de la dimensión y Menger lo invitó a participar en su coloquio. Gödel también ayudó a Menger a editar la revista, en la que él mismo publicó diversos artículos cortos y notas.

El tomarse o no en serio la parapsicología fue una cuestión que produjo divisiones y tensiones en el Círculo. Ludwig Wittgenstein había descubierto un libro de parapsicología en la biblioteca de Carnap y se había escandalizado. Otto Neurath también estaba en contra de cualquier contacto con esa superchería, mientras que Hahn y Carnap estaban a favor de examinar seriamente cualquier posición, por absurda que pudiera parecer. También Gödel se interesaba por los médiums, entonces de boga en Viena, y durante el resto de su vida mantuvo cierta creencia en fantasmas, telepatías y otros fenómenos paranormales.

A pesar de que Checoslovaquia ya era independiente de Austria, la frontera entre ambos países seguía siendo porosa. Gödel volvía siempre a casa en las vacaciones de verano, que pasaba en familia haciendo excursiones con sus padres y su hermano por diversos parajes de Chequia. Desde su llegada a Viena, Gödel siempre compartió apartamento con su hermano, hasta que en 1928 se mudaron ambos a un piso más grande en la Langengasse, destinado a poder alojar también a sus padres, cuando los visitaban en Viena. En 1929 se murió su padre (cuando le faltaban unos días para cumplir los cincuenta y cinco años), y su madre se trasladó a Viena a vivir con sus hijos.

La completud del cálculo lógico de primer orden

Cuando consideramos un sistema formal o un cálculo deductivo, hoy en día estamos habituados a distinguir las cuestiones sintácticas (acerca de relaciones entre signos, por ejemplo, si una fórmula es deducible en el cálculo) de las semánticas (acerca de relaciones entre los signos y otras cosas, por ejemplo, si esa fórmula es válida, es decir, verdadera en cualquier interpretación). Pero esta distinción no estaba clara para los primeros lógicos. En 1879, Frege había presentado el primer cálculo deductivo para lo que luego se llamaría la lógica de primero y segundo orden. En 1910, Russell y Whitehead habían ofrecido un cálculo deductivo que abarcaba la teoría de tipos entera. De hecho, la porción de primer orden (en la que solo se cuantifica sobre individuos) de ambos cálculos es semánticamente completa, es decir, es suficiente para obtener todas las fórmulas válidas de primer orden, como probó Gödel por primera vez en 1929. Pero Frege y Russell ni siquiera se podían plantear esta pregunta (metamatemática o metalógica, es decir, que mira al cálculo lógico desde fuera, desde otro lenguaje —el metalenguaje—), pues concebían la lógica como un lenguaje universal del que no se podía salir. Había otra tradición lógica proveniente del siglo XIX, la del álgebra de la lógica (representada por Boole, Peirce, Schröder y Löwenheim), pero en ella se limitaban a considerar la validez de las fórmulas en ciertos dominios, sin presentar cálculo o

sistema axiomático alguno, por lo que tampoco allí podían plantearse preguntas metalógicas sobre las propiedades del cálculo. Un problema más sencillo, el de la completud semántica del cálculo conectivo o proposicional, ya había sido planteado y resuelto positivamente por Emil Post en 1921 y por Paul Bernays en 1926. Gödel no había oído hablar del resultado de Post, pero conocía el de Bernays.

En verano de 1928 el interés de Gödel pasó de las ramas clásicas de la matemática a las cuestiones de fundamentos, y enseguida se fijó en el problema abierto de la completud semántica o suficiencia del cálculo deductivo de la lógica de primer orden, es decir, si ese cálculo es suficiente para obtener todas las fórmulas válidas o, equivalentemente, para obtener todas las consecuencias de un conjunto dado de premisas. ¿De dónde le vino a Gödel el estímulo para su trabajo? Quizá del libro *Grundzüge der theoretischen Logik* (Elementos de lógica teórica), de Hilbert y Ackermann, publicado ese mismo año 1928 y que realmente es el primer libro de texto de lógica en sentido actual. En él no solo se presenta un cálculo deductivo, sino que por primera vez se plantea la cuestión de si ese cálculo es completo o no. También la conocida oposición de Brouwer a la tesis de Hilbert de que bastaba con probar la consistencia de una teoría para asegurar la existencia matemática de sus objetos, expresada poco antes en una conferencia en Viena, podía haber influido, dado que la completud semántica se sigue de la satisfacibilidad de toda fórmula consistente. Sus frecuentes conversaciones sobre lógica con Carnap en este periodo pudieron también haber despertado su interés, aunque Carnap aún no distinguía claramente las nociones semánticas y sintácticas[2]. Quizás incluso su director de tesis, Hahn, le sugiriese el problema. Sea ello como fuere, Gödel eligió para su tesis el tema de la completud del cálculo lógico de primer orden.

A finales de 1928, Gödel empezó a trabajar en su tesis doctoral, y a mediados del año siguiente ya la había terminado. En julio de 1929 la tesis recibió el visto bueno de sus dos supervisores, Hahn y Furtwän-

[2] Las confusiones de Carnap al respecto se aprecian claramente en su obra *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, de esa época, inédita hasta su publicación en 2000, editada por T. Bonk y J. Mosterín, en Wissenschafliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

gler. A continuación revisó el texto (suprimiendo los pasajes más especulativos y añadiendo referencias) y lo mandó para su publicación a la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, donde se recibió en octubre y donde finalmente apareció casi un año más tarde, en septiembre de 1930, bajo el título «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls» (La completud de los axiomas del cálculo lógico de primer orden)[3]. Gödel obtuvo oficialmente el doctorado en febrero de 1930. En mayo habló sobre sus resultados en el coloquio matemático de Menger, en septiembre en la conferencia sobre la epistemología de las ciencias exactas celebrada en Königsberg y en noviembre en la Sociedad Matemática de Viena.

Hubo que esperar a 1928 para que Hilbert y Ackermann delimitaran de un modo preciso la lógica de primer orden. Desde luego su cálculo deductivo no era ni pretendía ser sintácticamente completo, pues solo trata de generar las fórmulas válidas y la mayoría de las fórmulas no son válidas, ni ellas ni sus negaciones. Por ejemplo, ni $\forall x Px$ ni $\neg\forall x Px$ es una fórmula válida. Lo que Hilbert y Ackermann se plantearon fue la pregunta de si su cálculo era semánticamente completo, y en su libro manifiestan explícitamente que esa pregunta aún no había encontrado respuesta. La respuesta (positiva) la dio Gödel el año siguiente, con lo cual el programa de Hilbert obtenía un éxito esperanzador.

Gödel tomó como punto de referencia el fragmento de primer orden del cálculo lógico contenido en *Principia Mathematica*. Russell y Whitehead se habían limitado al desarrollo sintáctico de su sistema formal. Pero ante tal proceder —y según Gödel— «se plantea natural-

[3] La traducción literal del título sería «La completud de los axiomas del cálculo lógico funcional». Hacia 1930 se llamaba cálculo lógico funcional lo que ahora se llama cálculo lógico de primer orden (y a veces incluso lo que ahora se llama cálculo lógico de orden superior). Por otro lado, conviene llamar la atención sobre la equivocidad de la palabra 'completud' en contextos de lógica: una veces (como aquí) significa completud semántica o suficiencia para obtener todas las fórmulas válidas, o todas las consecuencias de premisas dadas; otras veces (como en el famoso artículo de Gödel de 1931 sobre la incompletud de la aritmética), 'completud' significa completud sintáctica, es decir, que la teoría da respuesta a todas las preguntas formulables en su lenguaje, que para cada fórmula φ, o bien φ es un teorema de la teoría, o bien $\neg\varphi$ lo es.

mente la cuestión» de si tal sistema formal es semánticamente completo o no, si sus axiomas y reglas bastan para deducir todas las fórmulas válidas o no. Como ya vimos, Bernays había probado anteriormente que el fragmento más trivial —el cálculo conectivo— era semánticamente completo. Gödel probó en 1929 que un fragmento mucho más amplio y potente —el cálculo cuantificacional de primer orden— también lo es. Y su prueba es también aplicable al cálculo deductivo de Hilbert y Ackermann o al fragmento de primer orden del de Frege y a cualquier otro de los cálculos habituales de la lógica de primer orden.

En su trabajo, Gödel distingue cuidadosamente las nociones sintácticas de las semánticas, que los anteriores autores habían confundido, pero que luego Tarski y otros diferenciarían también con gran claridad. Gödel respondía en su tesis a las dos preguntas abiertas planteadas en Hilbert y Ackermann (1928): si el cálculo lógico de primer orden era completo y si los axiomas usados eran independientes unos de otros. Además, se planteó y resolvió otras cuestiones: extendió su resultado a la lógica de primer orden con identidad y a conjuntos (numerables) de fórmulas. Y formuló y probó el teorema de compacidad. El teorema de completud semántica de la lógica de primer orden, junto con sus corolarios —los importantes teoremas de Löwenheim-Skolem y de compacidad— están a la base de la teoría de modelos y de gran parte de la lógica actual.

Prueba del teorema de completud semántica

El teorema de completud semántica de la lógica de primer orden aparece en el artículo de Gödel de 1930 como teorema I: *Toda fórmula válida es deducible* (es decir, derivable con ayuda de los axiomas y reglas de inferencia del cálculo). El teorema I sería trivialmente demostrable si dispusiéramos del teorema II: *Cada fórmula es refutable o satisfacible* (sobre un universo numerable). En efecto, I afirma que cada fórmula válida es deducible. Sea φ una fórmula válida cualquiera.

Puesto que φ es válida, ¬φ no es satisfacible. Por tanto, por el teorema II, ¬φ es refutable, es decir, ¬¬φ es deducible y, por tanto, también φ es deducible. (El teorema II es equivalente al principio de que toda fórmula consistente es satisfacible, del que también se sigue la completud semántica. Sea φ una fórmula válida cualquiera. Puesto que φ es válida, ¬φ no es satisfacible. Por tanto, ¬φ no es consistente. De ¬φ se puede deducir cualquier cosa, y en especial φ, es decir, ¬φ ⊢ φ. Por tanto, φ ∨ ¬φ ⊢ φ. De donde se sigue que φ es deducible.)

Gödel define las K-fórmulas como sentencias prenexas, cuyo prefijo comienza con ∀ y termina con ∃, y prueba que si cada K-fórmula es refutable o satisfacible, entonces también lo es toda fórmula (teorema III). Para ello procede por inducción sobre el grado de las K-fórmulas, definido como el número de secuencias continuas de cuantificadores universales (separadas unas de otras por cuantificadores existenciales) en el prefijo de cada K-fórmula. En el teorema IV prueba que si cada K-fórmula de grado n es refutable o satisfacible, también lo es cada una de grado $n+1$. Con esto solo le queda por probar el teorema V: cada K-fórmula de primer grado es refutable o satisfacible. Esta prueba es la más difícil, y se lleva a cabo definiendo para cada K-fórmula $\pi\alpha$ (donde π es el prefijo y α el núcleo) una sucesión infinita de fórmulas $\pi_n\alpha_n$, tales que para cada n es deducible $\pi\alpha \rightarrow \pi_n\alpha_n$ (teorema VI). Finalmente (y aquí estriba la novedad fundamental de Gödel respecto a anteriores resultados parciales de Löwenheim y Skolem), Gödel introduce consideraciones semánticas y, para cada K-fórmula que no es refutable, construye un modelo que la satisface. Con esto queda probado el teorema V, y con él el II y el I, es decir, queda demostrada la completud semántica del cálculo lógico del primer orden.

En 1915, Löwenheim había probado que si una fórmula es satisfacible en un modelo cualquiera, entonces es satisfacible también en algún modelo (de ámbito) numerable. En 1920, Skolem había generalizado este resultado a un conjunto cualquiera de fórmulas de primer orden. Este *teorema de Löwenheim-Skolem* se desprende ahora como colorario de la prueba del teorema de suficiencia por Gödel. En efecto, el modelo que Gödel construye para cada fórmula no refutable tiene el conjunto de los números naturales como ámbito y es, por tanto,

un modelo numerable. Sea φ una fórmula satisfacible cualquiera. Puesto que φ es satisfacible, φ no es refutable (dada la corrección del cálculo). Por tanto, φ es satisfacible en un modelo numerable. Así pues, cualquier fórmula satisfacible en general es ya satisfacible sobre un ámbito numerable.

Una vez probado el teorema de suficiencia para el cálculo deductivo de primer orden sin identidad, Gödel lo generaliza, extendiéndolo a la lógica de primer orden con identidad. También cada fórmula válida de primer orden con identidad es deducible en el cálculo correspondiente.

Otro corolario del teorema de suficiencia es el *teorema de compacidad* —un conjunto infinito de fórmulas es satisfacible si y solo si cada uno de sus subconjuntos finitos lo es—, de tan fecundas aplicaciones matemáticas.

Finalmente, Gödel probó la independencia de los axiomas del cálculo deductivo de la lógica de primer orden con identidad que había estado considerando.

La prueba de suficiencia de la lógica de primer orden por Gödel en 1930 marca un jalón en la historia de la lógica. A partir de entonces el teorema ha sido probado también de otras maneras. En 1930, Hilbert y Bernays ofrecieron una prueba puramente sintáctica del mismo. En 1949, Henkin presentó una nueva prueba, semántica como la de Gödel, pero mucho más simple. La prueba de Henkin, simplificada a su vez por Hasenjaeger y otros, constituye la base de la mayor parte de las pruebas actuales de la suficiencia. También se utiliza el método de las tablas semánticas, más afín a la primitiva prueba de Gödel.

INCOMPLETUD DE LA ARITMÉTICA FORMAL

El doctorado no suponía un empleo, ni siquiera el inicio de una actividad (aunque fuera no pagada) en la universidad. Para ello se requería una *Habilitation*, un trabajo sustancioso de investigación. Gödel, que era intelectualmente ambicioso, pretendía atacar uno de los pro-

blemas de la famosa lista de Hilbert, el de encontrar una prueba finitista de la consistencia de los axiomas del análisis, empezando por los de la aritmética. Hilbert introdujo su programa (basado en la teoría de la prueba y tendente a probar la consistencia de la matemática clásica por métodos formales finitistas) en 1923. Aunque Gödel no pretendía en absoluto atacar el programa de Hilbert, sino más bien llevarlo adelante, en el curso de su investigación hizo descubrimientos sorprendentes y fatales para dicho programa.

El programa formalista de Hilbert requería la completa formalización de la matemática clásica. Sus conceptos habían de ser reemplazados por signos gráficos, sus ideas por hileras de signos, el razonamiento por la mera manipulación combinatoria de las hileras y la demostración por la deducción formal conforme a reglas mecánicas. Con esto podríamos olvidarnos del contenido transfinito presuntamente problemático de la matemática clásica y limitarnos a inspeccionar desde fuera el juego con hileras de signos, restringiendo ahora nuestros razonamientos a lo más evidente y menos problemático, a lo finitario.

Mediante razonamientos externos y finitarios acerca de las posibilidades combinatorias de las hileras finitas de signos había que probar que el juego no era peligroso, es decir, que jugando a él no podía caerse en contradicción alguna. En resumen, el programa formalista de Hilbert requería dos cosas: (1) construir sistemas formales completos para las principales teorías de la matemática clásica, y (2) probar la consistencia de dichos sistemas formales.

En un sistema formal tenemos en primer lugar un conjunto enumerable de signos primitivos, que determina el conjunto de sus hileras o secuencias finitas de signos (con posibles repeticiones). En segundo lugar tenemos ciertas reglas combinatorias, que determinan cuáles hileras son fórmulas. El conjunto de las fórmulas constituye el lenguaje formal del sistema. En tercer lugar tenemos otras reglas combinatorias, que determinan cuáles secuencias de fórmulas constituyen deducciones. Una sentencia es una fórmula sin variables libres. Una sentencia es deducible si constituye el último miembro de (una secuencia de fórmulas que es) una deducción. El conjunto de las sentencias deducibles constituye una teoría formalizada.

Un sistema formal *S* es *completo* si y solo si para cada sentencia φ de su lenguaje formal ocurre que φ es deducible en *S* o que *no*-φ es deducible en *S*. Así pues, un sistema formal completo da respuesta a todas las preguntas que se puedan formular en su lenguaje. Con su ayuda pueden decidirse todas las cuestiones pertinentes. Basta con deducir y deducir... hasta llegar a φ o a *no*-φ. Es seguro que a una de las dos llegaremos. Todos los problemas planteados en un sistema formal completo son decidibles.

Un sistema formal *S* es *incompleto* si y solo si hay alguna sentencia φ, tal que ni φ es deducible en *S*, ni tampoco lo es *no*-φ. Por tanto, hay problemas planteables en *S* para los que *S* no ofrece solución, hay problemas indecidibles en *S*.

Un sistema formal *S* es *consistente* si y solo si hay alguna sentencia de su lenguaje formal que no es deducible en *S* (o, equivalentemente, si para ninguna sentencia φ ocurre que tanto φ como *no*-φ sean deducibles en *S*).

Un sistema formal *S* es *inconsistente* o contradictorio si y solo si toda sentencia del lenguaje formal de *S* es deducible en *S* (o, equivalentemente, si hay alguna sentencia φ del lenguaje formal de *S*, tal que tanto φ como *no*-φ son deducibles en *S*).

Aunque un sistema formal incompleto puede ser de gran utilidad teórica, un sistema formal inconsistente es absolutamente absurdo e inútil.

Una teoría definida semánticamente (como el conjunto de las sentencias verdaderas en un modelo determinado) es siempre completa y consistente. Y si pretendemos que un sistema formal (como la aritmética formalizada) refleje perfectamente una teoría definida semánticamente (como la aritmética natural), entonces es preciso que el sistema formal sea completo y consistente. Por otro lado, si pretendemos probar la consistencia de un sistema formal de un modo satisfactorio, es preciso que los razonamientos empleados en la prueba de consistencia sean más simples o débiles o seguros que los incorporados en el sistema formal mismo o, en cualquier caso, no más potentes y arriesgados.

Hacia 1930 la situación del programa formalista de Hilbert era más o menos la siguiente. Se pensaba que el primer requerimiento (formali-

zación completa de la matemática clásica) había sido ya básicamente cumplido con la construcción del sistema formal de *Principia Mathematica* y otros comparables (como la teoría axiomática de conjuntos suplementada por un cálculo lógico). Y varios matemáticos y lógicos trataban de cumplir el segundo requerimiento (es decir, trataban de probar la consistencia del sistema formal). Como la tarea parecía difícil, se trataba de empezar por lo más fácil, por probar la consistencia de algún sistema formal de la aritmética.

El año 1931 se publicó el artículo más famoso de Gödel y quizá de la historia entera de la lógica. Sus resultados mostraban la imposibilidad de llevar a cabo el programa de Hilbert. En primer lugar, Gödel probaba que todos los sistemas formales de la matemática clásica (incluidos el de *Principia Mathematica*, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos y, en general, cualquier sistema formal suficientemente expresivo) son incompletos, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente construirse una sentencia indecidible (tal que ni ella ni su negación es deducible). Además, esta incompletud no tiene remedio. Por muchos axiomas que añadamos, los sistemas formales siguen siendo incompletos. En segundo lugar, Gödel demostraba que es imposible probar la consistencia de un sistema formal (que cumpla ciertas mínimas condiciones de expresividad) de la matemática clásica, incluso utilizando todos los recursos y razonamientos incorporados en el sistema, es decir, que es imposible demostrar la consistencia de un sistema formal dentro del mismo. Naturalmente, sigue siendo posible probar su consistencia desde una teoría más potente que el propio sistema formal, pero eso sería de dudosa utilidad.

Los resultados de Gödel cayeron como una bomba, a pesar de que él mismo trató de dorar la píldora, indicando posibles salidas. Además, el carácter efectivo y constructivo de sus pruebas, admisibles para todos los lógicos y matemáticos, incluso para los intuicionistas, hizo que estas fueran aceptadas de inmediato. Ni la lógica ni la filosofía de la matemática volverían ya nunca a ser lo que fueron. Una cierta ingenuidad y un cierto optimismo habían desaparecido para siempre.

La formalización y los sistemas formales dejaban de ser una panacea filosófica y sus posibilidades y limitaciones intrínsecas pasaban a

convertirse en objeto de estudio riguroso para una metamatemática que acababa de alcanzar su madurez.

Gödel llevó a cabo sus pruebas planteando y resolviendo los problemas metamatemáticos dentro de la aritmética. Por un ingenioso procedimiento, Gödel asignó números naturales a las hileras (y secuencias de hileras) de signos del sistema formal y relaciones numéricas a las relaciones metamatemáticas. Establecido así un isomorfismo —una gödelización— entre el sistema formal y cierto sistema numérico, Gödel se movió con gran habilidad entre ambos, jugando con el doble hecho de que, por un lado, toda afirmación metamatemática sobre el sistema formal tenía un correlato numérico, y de que, por otro lado, toda afirmación numérica pertinente podía ser expresada por una fórmula del sistema formal. Así era posible construir una sentencia φ que, naturalmente interpretada, decía que un cierto número *n* tenía una cierta propiedad *P*. Pero ese número era el número correspondiente a la fórmula φ, y esa propiedad era la propiedad numérica correspondiente a la propiedad metamatemática de no ser deducible. Por tanto, la sentencia φ, naturalmente interpretada, afirmaba su propia indeducibilidad. Bordeando la paradoja del mentiroso, pero sin caer en ella (la sentencia φ es a la vez verdadera e indeducible, y en ello no hay paradoja alguna, aunque sí sorpresa), Gödel prueba que ni φ ni no-φ pueden ser deducibles en el sistema formal, que, por tanto, es incompleto. De modo análogo prueba que es imposible deducir la fórmula que, naturalmente interpretada, afirma la consistencia del sistema.

En sus correrías aritméticas, Gödel se limita básicamente a una clase especialmente manejable de relaciones y funciones numéricas: las relaciones y funciones recursivas primitivas, definidas por primera vez en este artículo y cuyo estudio daría lugar más tarde a la teoría de la recursión.

En febrero, Tarski fue a Viena a dar unas conferencias en el coloquio de Menger y habló con Gödel. En agosto de 1930, Gödel ya había obtenido la prueba del primer teorema de incompletud: ningún sistema formal puede contener todas y solas las verdades aritméticas; una teoría aritmética axiomatizable y consistente no puede ser completa.

En septiembre, Gödel, Carnap, Hahn, Grelling y Feigl viajaron en tren de Viena a Königsberg para asistir a la conferencia sobre la episte-

mología de las ciencias exactas. El primer día hubo tres exposiciones sobre las posiciones en boga en filosofía de la matemática, el logicismo, el intuicionismo y el formalismo, impartidas respectivamente por Carnap, Heyting y von Neumann. Gödel se mantuvo en silencio hasta el último día, en que anunció en la discusión que había encontrado «ejemplos de proposiciones aritméticas verdaderas por su contenido, pero indemostrables en el sistema formal de la matemática clásica». Pocos de los presentes se dieron cuenta de la importancia de las observaciones de Gödel. Posiblemente el único que se dio cuenta fue von Neumann, que luego habló con Gödel para pedirle más detalles. Poco después le escribió para hablarle de su propia idea de una prueba sobre la imposibilidad de probar la consistencia de la aritmética, pero Gödel se le había adelantado (algo a lo que von Neumann no estaba acostumbrado). El 17 de noviembre llegó a los editores de *Monatshefte für Mathematik und Physik* el manuscrito definitivo de su famoso artículo, «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I» (Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas similares). Von Neumann quedó impresionado y desde entonces siempre tuvo a Gödel en la más alta estima. En cuanto Gödel le mandó una separata de su artículo, von Neumann interrumpió su curso en Berlín para informar sobre esos nuevos resultados. Al año siguiente eligió los teoremas de Gödel como tema de su conferencia en el coloquio matemático de Princeton.

Hilbert estaba presente en Königsberg, pero no asistía a la pequeña reunión de la conferencia de epistemología, sino al gran congreso de la Sociedad de Científicos y Médicos Alemanes. Al final de su conferencia estelar sobre lógica y conocimiento de la naturaleza, insistía en que en la matemática no hay problemas insolubles, ignorando que Gödel acababa de anunciarlos en la misma ciudad. Gödel nunca habló con Hilbert directamente ni mantuvo correspondencia con él. De todos modos, poco después, Hilbert tuvo conocimiento de los resultados de Gödel y los aceptó, tratando de salvar lo que se pudiese de su programa mediante innovaciones técnicas, como la regla-ω [que permite pasar, en la aritmética formalizada, de las infinitas premisas $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, ... a la conclusión $\forall x\, \varphi(x)$].

En enero de 1931, Gödel informó de sus nuevos resultados sobre incompletud en Viena, tanto en el círculo de Schlick como en el coloquio de Menger. En septiembre lo hizo en la reunión de la Sociedad de Matemáticos Alemanes en Bad Elster, donde se tropezó con la oposición empecinada de Zermelo, que no acababa de entenderlos. Tampoco los entendía Wittgenstein, como muestran sus comentarios en *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Observaciones sobre los fundamentos de la matemática), publicados póstumamente.

El 25 de junio de 1932, Gödel entregó su artículo del año anterior sobre incompletud como escrito de habilitación. La Facultad aprobó finalmente su habilitación en diciembre, con lo que Gödel obtuvo su *venia legendi*. El 11 de febrero de 1933 impartió su lección inicial de prueba (*Probevortrag*), que fue aprobada por la Facultad. Al cabo de un mes fue nombrado *Privatdozent*. En el siguiente semestre de verano, que empezaba el 4 de mayo, Gödel dio un curso de dos horas semanales sobre «Fundamentos de la aritmética», uno de los pocos que dio en su vida.

GÖDELIZACIÓN

En un sentido muy general, un alfabeto es un conjunto finito de signos. Una palabra o texto o hilera o ristra sobre ese alfabeto es una secuencia de signos de ese alfabeto (donde, por supuesto, el mismo signo puede aparecer varias veces, en diferentes posiciones, en la secuencia). Llamemos W al conjunto de todas las palabras o hileras sobre el alfabeto dado. Para cualquier hilera w de signos de ese alfabeto, $w \in W$.

Una gödelización del lenguaje escrito W es cualquier función (o asignación de números —llamados números de Gödel— a hileras de signos) g: $W \rightarrow \mathrm{N}$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) La función g es biunívoca, es decir, a diferentes hileras se les asignan números de Gödel diferentes: $w_1 \neq w_2 \Rightarrow g(w_1) \neq g(w_2)$.

(2) La función g es computable, es decir, para cualquier hilera dada w es posible computar efectivamente su número de Gödel, $g(w)$.

(3) El recorrido $g(W)$ es decidible, es decir, para cualquier número natural dado n se puede decidir efectivamente si n es un número de Gödel o no.

(4) La función inversa g^{-1} es computable, es decir, para cada número de Gödel dado $n \in g(W)$ es posible computar efectivamente la hilera w cuyo número de Gödel es n (es decir, la hilera w tal que $g(w)=n$).

Bajo una gödelización determinada, cada hilera de signos representa un número y cada número de Gödel codifica una hilera.

Gödel introdujo en su trabajo de 1931 la primera gödelización, una codificación numérica del lenguaje formal de *Principia Mathematica*, reformulado por Gödel. La idea general era la siguiente: Sea A el alfabeto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n\}$. En primer lugar introducimos una asignación de los n primeros números impares consecutivos a los signos de A: 1 a a_1, 3 a a_2, 5 a a_3, 7 a a_4, etc., hasta $2n$-1 a a_n. Llamemos $\breve{g}$ a esa aplicación de A en N. Para cada signo a_i: $\breve{g}(a_i)=2i-1$. Una vez definida $\breve{g}$: $A \rightarrow$ N, podemos definir la gödelización g: $W \rightarrow$ N del siguiente modo. Para cada hilera, es decir, para cada secuencia finita $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$ de signos de A: $g(z_1, z_2, z_3, \ldots z_m)=p_1^{\breve{g}(z_1)} \cdot p_2^{\breve{g}(z_2)} \cdot p_3^{\breve{g}(z_3)} \cdot \ldots \cdot p_m^{\breve{g}(z_m)}$, donde p_i es el i-ésimo número primo.

Obviamente, g satisface las condiciones para una gödelización, incluida la tercera. La descomposición unívoca de cualquier número natural en factores primos nos permite decidir si un número natural dado es un número de Gödel o no. Por ejemplo, $1992=2^3 \cdot 3^1 \cdot 83^1$ no es un número de Gödel, porque el tercer factor primo de su descomposición no es el tercer número primo, 5, sino 83. Por el contrario, $2700000=32 \cdot 27 \cdot 3125=2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ es un número de Gödel, a saber, $g(a_3 a_2 a_3)$.

El alfabeto $\{x, ', \neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, =\}$ de la lógica de primer orden con identidad (donde las variables son x', x'', x''', ...) puede ser representado mediante los los números 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17, respectivamente. Sobre esta base, y según las indicaciones anteriores, se puede establecer una gödelización g de todas las hileras finitas de signos. Por ejemplo, $g(\neg\exists x' \neg x'=x')=2^7 \cdot 3^{13} \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot 13^3 \cdot 17^5 \cdot 19^{17} \cdot 23^3 \cdot 29^5$.

Con ayuda de esta codificación numérica de las hileras de signos lógicos y variables, Gödel pudo transformar las preguntas lógicas (por

ejemplo, si una fórmula era deducible de otra fórmula) en preguntas aritméticas (si cierto número estaba en determinada relación aritmética con otro número). Esta representación numérica fue esencial para la prueba de los teoremas de incompletud y, en especial, para la construcción de la fórmula autorreferencial sobre la que pivota la demostración.

Como su nombre indica, el procedimiento de la gödelización fue inventado por Gödel. Puestos a buscar algún precedente histórico, se puede encontrar en la idea leibniziana de asignar números primos a los conceptos simples y el producto de los números de sus componentes simples a los conceptos compuestos. Gödel siempre fue un admirador de Leibniz, a quien leyó asiduamente en sus años de estudiante y en varias etapas posteriores de su vida.

La prueba del teorema de incompletud de la aritmética

Gödel comienza con la descripción detallada del sistema formal *P*, que va a servir de base a sus demostraciones y que esencialmente consiste en la unión de la lógica de *Principia Mathematica* con los axiomas de Peano. La lógica de *Principia Mathematica* es una lógica de tipos, que distingue variables de cada tipo. En el sistema *P* se fija la interpretación de las variables de una vez por todas: las variables de tipo 1 se referirán a números naturales; las de tipo 2, a clases de números naturales; las de tipo 3, a clases de clases de números naturales, etc. Esta fijación, junto con el añadido de los axiomas de Peano, convierte a *P* en un sistema interpretado. Por tanto, siempre hay una interpretación natural de cada fórmula de *P*, conforme a la cual cada fórmula, si bien es una mera hilera o fila de signos, tiene un contenido, expresa una idea (*verdadera o falsa*) *sobre los números naturales*.

A continuación, Gödel introduce un procedimiento para codificar numéricamente la metateoría del sistema formal *P*, es decir, una gödelización. Gödel asigna biunívocamente números naturales a cada signo primitivo de *P*, a cada hilera de signos de *P*, a cada fórmula de *P* y a

cada sucesión de fórmulas de *P*, con lo que cada entidad sintáctica queda representada por un cierto número natural.

Esta representación numérica de las entidades sintácticas determina una serie de relaciones y funciones numéricas que corresponde exactamente a las relaciones y funciones metamatemáticas. Así, a la propiedad metamatemática de ser un axioma corresponde la propiedad numérica de ser el número de Gödel de un axioma. A la relación metamatemática en que está una fórmula con otras dos cuando es inferible de ellas mediante la regla del *modus ponens* (que permite inferir β de $\alpha \Rightarrow \beta$ y α) corresponde la relación numérica en que está un número natural *n* con otros dos *m* y *p* cuando *n* es el número de Gödel de una fórmula inferible por *modus ponens* de otras dos fórmulas cuyos números de Gödel son *m* y *p*.

Gödel introduce aquí una digresión para definir la clase de las funciones numéricas recursivas primitivas. Aunque funciones de este tipo habían sido usadas por otros autores, Gödel dio aquí su primera definición explícita (funciones obtenidas por composición y recursión a partir de ciertas funciones iniciales triviales), que se ha hecho clásica. Una relación numérica *R* es recursiva primitiva si y solo si lo es su correspondiente función característica (es decir, la función f_R tal que $Rx_1 \ldots x_n \Leftrightarrow f_R(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n$).

Seguidamente, Gödel define 46 relaciones y funciones numéricas, 41 de las cuales corresponden a otras tantas nociones metamatemáticas. Con frecuencia, Gödel designa la noción numérica correspondiente a una noción metamatemática con el nombre de esta última, escrito en versalitas (en el original, en un tipo especial de cursiva). Así, 'NEGACIÓN' es el nombre de la función numérica que asigna a cada número de Gödel de una hilera el número de Gödel de la hilera que resulta de anteponer a la primera el signo de negación. Gödel prueba que las 45 primeras relaciones son recursivas primitivas, pero la última no lo es. La última es la propiedad numérica de ser una FÓRMULA DEDUCIBLE, es decir, la propiedad que tiene un número natural si y solo si es el número de Gödel de una fórmula deducible.

El sistema formal *P* dispone de signos para el número 0 y para la función del siguiente; con ello dispone de signos compuestos (térmi-

nos) para cada número natural. Sea $\overline{m}$ el término de P que en la interpretación natural se refiere al número natural m. Una relación numérica n-aria R es *representable en* P si y solo si hay una fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ de P tal que si los números naturales $m_1, ..., m_n$ están en la relación R, entonces la fórmula $\varphi(\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n)$ es deducible en P, y si los números $m_1, ..., m_n$ no están en la relación R, entonces la negación de $\varphi(\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n)$ es deducible en P. En el teorema V prueba Gödel que *cada relación numérica recursiva primitiva es representable en P.*

Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje de P se llama ω-consistente si y solo si no hay ninguna fórmula $\varphi(x)$ tal que, por un lado, para todo número natural m, $\varphi(\overline{m})$ es deducible de Γ y, por otro lado, también $\neg\forall x\, \varphi(x)$ es deducible de Γ.

El teorema VI constituye el famoso *teorema de incompletud* de Gödel: *en el sistema P* (aunque lo completemos con cualquier clase recursiva primitiva y ω-consistente K de nuevos axiomas) *hay siempre alguna sentencia tal que ni ella ni su negación es deducible en el sistema.*

Gödel prueba el teorema VI construyendo efectivamente una sentencia indecidible, la correspondiente al número de Gödel (17 Gen r), donde r puede ser efectivamente computado. Se trata de una sentencia que, naturalmente interpretada, afirma de sí misma que no es deducible.

Gödel prueba que (1) si $P \cup K$ es consistente, entonces esa sentencia no es deducible, y (2) si $P \cup K$ es ω-consistente, entonces la negación de esa sentencia tampoco es deducible. Por tanto, si $P \cup K$ es ω-consistente, $P \cup K$ es un sistema formal incompleto.

La ω-consistencia es una exigencia más fuerte que la mera consistencia, a la que implica. Esencialmente prohíbe que afirmemos una cierta propiedad de cada número natural por separado y al mismo tiempo neguemos que la tengan todos los números naturales. Evidentemente, todo conjunto ω-consistente de fórmulas es en especial consistente a secas, pero no todo conjunto consistente es ω-consistente. En 1936, siguiendo los pasos de Gödel, pero construyendo una sentencia indecidible más complicada, Barkley Rosser logró reducir la exigencia de ω-consistencia en (2) a la de mera consistencia. Por tanto, hoy sabemos que todo sistema formal consistente y algo expresivo (es decir, en el que sean definibles las funciones recursivas primitivas) es incompleto.

Gödel concluye esta segunda parte haciendo varias importantes observaciones sobre su prueba del teorema de incompletud: que la prueba es constructiva (intuicionistamente aceptable); que la prueba sigue valiendo aunque añadamos el axioma de elección y la hipótesis del continuo al sistema formal considerado; y que el teorema de incompletud es válido para todos los sistemas formales algo expresivos conocidos, incluyendo la teoría axiomática de conjuntos y la aritmética de Peano.

Gödel también expone otros resultados complementarios de indecidibilidad, que refuerzan los ya obtenidos. Gödel introduce aquí la noción de clase, relación y sentencia aritmética. Por ejemplo, una clase A de números naturales es aritmética si y solo si hay una fórmula de primer orden $\alpha(x)$ construida con las solas constantes extralógicas 0, s, +, ·, y tal que para cada número natural n vale: $n \in A$ si y solo si $\alpha(\bar{n})$ es verdad (en la interpretación natural). En definitiva, las clases y relaciones aritméticas son las clases y relaciones numéricas definibles mediante fórmulas de primer orden y usando solo las nociones de *cero*, *siguiente*, *suma* y *producto*. Evidentemente, no todas las clases y relaciones numéricas son aritméticas. De hecho, la mayoría no lo son, pues hay una infinidad innumerable de clases y relaciones de números naturales, mientras que solo hay una infinidad numerable de fórmulas.

Gödel formula y prueba el teorema VII: *Cada relación recursiva primitiva es aritmética.* De ahí se sigue como un corolario el teorema VIII: *En cada sistema formal* (considerado) *hay sentencias aritméticas indecidibles.* En efecto, la sentencia indecidible construida por Gödel en la prueba del teorema VI tenía la forma $\forall x\, Bx$, donde B era un predicado recursivo primitivo y por tanto aritmético. Luego hay una fórmula $\varphi(x)$ de primer orden con las solas constantes extralógicas 0, s, +, ·, tal que $\forall x\, \varphi(x)$ es una sentencia aritmética equivalente a la sentencia indecidible dada y, por consiguiente, ella misma indecidible.

Después de probar que los sistemas formales considerados no solo son incompletos, sino que ni siquiera sirven para decidir cada cuestión aritmética elemental (expresable en una sentencia aritmética), pasa a mostrar que tampoco sirven para decidir la validez de una fórmula de la lógica pura (es decir, una fórmula sin constantes extralógicas y con solo variables individuales y predicativas) de primer orden. Gödel de-

muestra el teorema X: *Cada problema de la forma* $\forall x\, Bx$ *(con B recursivo primitivo) es reducible al problema de determinar si una cierta fórmula de la lógica pura de primer orden es satisfacible o no.* De aquí se sigue como corolario el teorema IX: *En cada sistema formal* (considerado) *hay fórmulas indecidibles de la lógica pura de primer orden.* En efecto, solo las fórmulas válidas de la lógica pura son deducibles. Si todas las fórmulas de la lógica pura fuesen decidibles en el sistema formal, podríamos decidir cuándo son válidas y, por tanto, cuándo son satisfacibles (a saber, cuando su negación no es válida). Pero, por el teorema X, eso nos permitiría decidir cada cuestión de la forma $\forall x\, Bx$ (con B recursivo primitivo), y por tanto decidir en el sistema formal la sentencia en él indecidible, construida por Gödel (y que tenía esta forma), lo cual es imposible.

La última parte del artículo de 1931 está dedicada a esbozar la prueba de un descubrimiento sorprendente de Gödel: *Si un sistema formal* (de los considerados) *es consistente, entonces es imposible probar formalmente su consistencia con sus propios medios, es decir, es imposible deducir en él la sentencia que dice que es consistente.*

En la prueba del teorema VI, Gödel había probado mediante razonamientos aritméticos elementales que si el sistema formal es consistente, entonces la sentencia —llamémosla φ— cuyo número de Gödel es (17 Gen r) no es deducible. Pero φ dice, en la interpretación natural, que ella misma no es deducible, lo cual es verdad. Por tanto, Gödel había probado que si el sistema formal es consistente, entonces φ es verdad. Sea σ la fórmula que, en la interpretación natural, dice que el sistema formal es consistente (es decir, que una determinada fórmula, por ejemplo $x \neq x$, no es deducible en él). Los razonamientos aritméticos elementales usados por Gödel pueden formalizarse en el sistema formal. Por tanto, en el sistema formal puede deducirse la fórmula $\sigma \Rightarrow \varphi$, que en la interpretación natural dice que si el sistema formal es consistente, entonces φ es verdad. Ahora bien, si pudiéramos deducir la sentencia σ, entonces podríamos también deducir (por la regla de inferencia de *modus ponens*) la sentencia φ. Pero habíamos probado que si el sistema formal es consistente, entonces φ no es deducible. Por tanto, si el sistema formal es consistente, tampoco será deducible σ, es

decir, no será deducible la sentencia que, en la interpretación natural, dice que el sistema formal es consistente. Si el sistema formal es contradictorio, podemos deducir (en él) cualquier cosa, tanto que es consistente como que no lo es. Pero si el sistema formal es consistente, entonces no podemos deducir (en él) que lo es.

ARITMÉTICA CLÁSICA E INTUICIONISTA

Durante 1932, Gödel participó activamente tanto en el seminario de Hahn sobre lógica como en el coloquio matemático de Menger. El 28 de junio de 1932 presentó en el coloquio de Menger su importante comunicación «Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie» (Sobre la aritmética intuicionista y la teoría de números), publicado el año siguiente en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*.

La lógica y la aritmética intuicionistas surgieron en parte como reacción a la presunta amplitud y peligrosidad excesivas de la lógica y la aritmética clásicas. La lógica y la aritmética intuicionistas serían más reducidas, más exigentes, más estrictas y, por ello, menos peligrosas. Con la lógica y aritmética clásicas quizá uno podría perderse y caer en contradicciones; con las intuicionistas eso estaba excluido. Y, en efecto, si procedemos a la traducción directa de los conectores intuicionistas $-$, Δ, ∇, $\supset$, por los conectores clásicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, y a la identificación de los cuantificadores y signos aritméticos de ambas lógicas y aritméticas, resulta que cada fórmula intuicionistamente válida se convierte en una fórmula clásicamente válida, pero no a la inversa. La lógica y la aritmética intuicionista resultan así ser más reducidas que las clásicas, y el conjunto de las fórmulas válidas intuicionistas (traducidas) resulta ser un subconjunto propio del de las fórmulas válidas clásicas, como era de esperar. De todos modos la traducción antes indicada no es la única traducción posible. Si uno adopta otras, hechos inversos y sorprendentes salen a la luz.

Adoptando ciertas traducciones alternativas, ya Kolmogorov en 1925 y Glivenko en 1929 habían probado que de algún modo la lógica

conectiva intuicionista incluye la clásica. Las consideraciones de Kolmogorov se publicaron en ruso y no fueron divulgadas en otras lenguas hasta mucho más tarde, cuando ya habían sido superadas por los resultados más precisos de Gödel, que sí conocía, sin embargo, el trabajo de Glivenko, del que hizo uso.

En una ponencia presentada el 28 de junio de 1932 ante el coloquio matemático de Viena, Gödel mostró que si φ es una fórmula conectiva clásicamente válida construida con los solos conectores $\neg$ y $\wedge$, entonces la traducción directa (es decir, $\neg$ por $-$ y $\wedge$ por Δ) de φ es una fórmula intuicionistamente válida. Y puesto que los demás conectores clásicos ($\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) son definibles en función de $\neg$ y $\wedge$, resulta que el conjunto de las fórmulas válidas de la lógica conectiva clásica (así reescritas y traducidas) es un subconjunto del conjunto de las fórmulas válidas de la lógica conectiva intuicionista. Pero en la citada ponencia Gödel hizo más que eso. Probó además el sorprendente resultado de que la totalidad de la aritmética formal clásica (que incluye la lógica clásica de primer orden) puede incluirse en la aritmética intuicionista, adoptando la siguiente traducción: donde la aritmética formal clásica escribe $\neg$ y $\wedge$, $\forall$, en la traducción escribimos también $-$, Δ, $\forall$. Donde la aritmética formal clásica escribe $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\exists x\, \varphi$, en la traducción escribimos $-(-\varphi\Delta-\psi)$, $-(\varphi\Delta-\psi)$ y $-\forall x-\varphi$, respectivamente. Los signos aritméticos se mantienen. Para desarrollar su prueba de un modo preciso, Gödel toma dos sistemas formales concretos y explícitos: el sistema formal de aritmética clásica de Herbrand y el sistema formal de aritmética intuicionista de Heyting (con ciertas ampliaciones intuicionistamente aceptables). A continuación, para cada fórmula φ de la aritmética clásica construye Gödel su traducción φ' en la aritmética intuicionista, y demuestra que si φ es deducible en la aritmética formal clásica (de Herbrand), entonces φ' es deducible en la aritmética formal intuicionista (de Heyting). De ahí resulta que todas las afirmaciones de la aritmética clásica son también (aunque bajo otro disfraz o interpretación) afirmaciones de la aritmética intuicionista. Este resultado fue todavía simplificado en 1936 por Gentzen, que probó lo mismo, pero sin necesidad de parafrasear $\varphi \Rightarrow \psi$ por $-(\varphi\Delta-\psi)$, es decir, traduciendo también directamente $\varphi \Rightarrow \psi$ por $\varphi \supset \psi$.

La demostración de que todo teorema de la aritmética clásica (traducido) es también un teorema de la aritmética intuicionista proporciona de pasada una prueba de consistencia relativa de la aritmética (y de la lógica) clásica respecto a la intuicionista. Cualquier contradicción de la aritmética clásica sería trasladable a la intuicionista. Si la primera fuese contradictoria, también lo sería la segunda. Por tanto, si estamos seguros de que la aritmética intuicionista es consistente, también podemos estarlo de que lo es la clásica. A pesar de las apariencias, no hay diferencia de amplitud ni de riesgo entre ambas.

Este resultado redujo considerablemente la motivación para tratar de desarrollar la matemática sobre bases intuicionistas, como había propugnado Brouwer. Fue el primero y más importante de una serie de trabajos de Gödel sobre las relaciones entre matemática clásica e intuicionismo. En otra sesión del mismo coloquio matemático presentó Gödel sorprendentes resultados sobre la relación entre lógica modal e intuicionista. Más tarde, en una conferencia en Yale, el 15 de abril de 1941, volvió al tema de la relación entre lógica y aritmética clásica e intuicionista (que ya había tratado en un artículo de 1933), bajo el título «In what sense is intuitionistic logic constructive?», cuyo texto solo se publicó póstumamente[4]. Partiendo de las dos objeciones intuicionistas contra la matemática clásica, referida la una a las definiciones impredicativas y la otra al *tertium non datur*, mostró que la primera es más fundamental. En efecto, una redefinición de la disyunción y del cuantificador existencial convierten cada prueba clásica en una prueba intuicionista, bajo la hipótesis de que no haya definiciones impredicativas. Gödel ofreció su propia propuesta de un sistema realmente constructivo de lógica y aritmética, que más tarde sería retomado por él mismo en sus artículos de *Dialectica* de 1958 y 1972.

Durante estos años treinta escribió algunas breves recensiones. Se comprometió a escribir un artículo con Heyting sobre los fundamentos de la matemática, pero, después de atrasar su publicación, no llegó a escribir nunca su parte. Gödel mantendría toda su vida esta costumbre de mal cumplidor de compromisos editoriales, no por desidia o desinterés, sino más bien por exagerado perfeccionismo.

[4] En Kurt Gödel, *Collected Works*, vol. III, págs. 189-200.

En la sesión del coloquio matemático de Menger del 28 de junio de 1932 en que Gödel anunció sus resultados sobre la consistencia de la lógica clásica e intuicionista estaba presente Oswald Veblen, por entonces ocupado con la organización del Instituto de Estudios Avanzados (IAS) de Princeton. Veblen quedó impresionado por la conferencia de Gödel, y poco después le escribió invitándolo a incorporarse al IAS durante su primer año operativo (1933-1934). Veinticuatro personas fueron invitadas al IAS el primer año, y Gödel fue uno de los que aceptaron la invitación.

Tras posponer su salida, finalmente Gödel embarcó en Southampton el 30 de septiembre de 1933 y llegó a Nueva York seis días después. Pasó el semestre de otoño-invierno en Princeton y dio conferencias en Cambridge (Mass.), Nueva York y Washington. En Princeton tuvo discusiones con Alonzo Church y, de febrero a mayo de 1934, impartió un curso titulado «On undecidable propositions of formal mathematical systems» (Sobre proposiciones indecidibles de sistemas formales matemáticos). S. Kleene y J. Rosser tomaron apuntes del curso, que distribuyeron entre los interesados. En este curso (y tras sus discusiones con Church), Gödel presentaba sus resultados de 1931 de un modo novedoso, tomando como base un sistema formal más sencillo y, sobre todo, subrayando la generalidad de sus teoremas de incompletud, que no dependen del sistema formal elegido. Además, introdujo la noción de función recursiva general (que luego resultó ser equivalente a la de definibilidad-λ de Church y a la posterior de computabilidad de Turing). Acabada su primera estancia en el IAS, Gödel regresó a Europa, embarcando el 24 de mayo de 1934, quedándose de visita turística tres días en Venecia y llegando a Viena el 7 de junio.

Tiempos turbulentos (1934-1939)

En Alemania, Hitler había alcanzado el poder en enero de 1933. Tres meses después, todos los profesores judíos fueron expulsados de las universidades alemanas. Algunas, como las de Berlín o Frankfurt, perdieron hasta un tercio de su profesorado. Martin Heidegger, flamante

rector nazi de la Universidad de Freiburg, saludaba el nuevo destino del pueblo alemán. Ante las noticias que llegaban de Alemania, los nazis austriacos se envalentonaron. Ya en el semestre de verano de 1933, mientras Gödel impartía en Viena su curso sobre fundamentos de la aritmética, los nazis ponían bombas y daban palizas en la universidad, adonde (por un anacrónico privilegio) no podía entrar la policía.

Cuando, tras su estancia en América, Gödel regresó a Viena el 7 de junio de 1934, se encontró con una situación crecientemente crispada y deprimente. El 24 de junio murió su mentor Hans Hahn de cáncer, con solo cincuenta y cinco años. Al día siguiente fue asesinado el presidente Dollfuss. La salud física y mental de Gödel se deterioró. En octubre ingresó en el sanatorio de Purkersdorf, donde se le diagnosticó colapso nervioso.

En mayo de 1935, tras ser obligado a apuntarse al Frente Patriótico de los socialcristianos, Gödel reanudó su actividad docente, dando un curso de dos horas semanales sobre «Capítulos selectos de la lógica matemática», en el semestre de verano. Posiblemente durante ese curso se le ocurrió la idea de los conjuntos constructibles y la prueba de la consistencia relativa del axioma de elección.

Gödel seguía permanentemente invitado al IAS de Princeton. El 20 de septiembre de 1935 embarcó de nuevo hacia América en Le Havre. En el mismo barco viajaban Wolfgang Pauli y Paul Bernays, con los que pudo conversar durante el viaje. De todos modos, su estancia americana de ese año fue especialmente corta y desafortunada, pues, poco después de llegar al IAS, se sintió mal y tuvo que dimitir por razones de salud y depresión. El 30 de noviembre volvió a embarcar en Nueva York con rumbo a Europa.

Gödel pasó varios meses de 1936 en un sanatorio para enfermedades nerviosas en Rekawinkel, cerca de Viena, acompañado a veces por su amiga Adele. Durante esta época, Gödel leyó abundantemente sobre neurología, locura y envenenamientos, lo cual es sintomático de su estado de ánimo. El 22 de junio de 1936, Moritz Schlick fue asesinado en la universidad por un estudiante desequilibrado.

En el trimestre de verano de 1937, a partir de mayo, Gödel impartió un curso de doce clases sobre «Axiomatik der Mengenlehre»

(Axiomas de la teoría de conjuntos). En este curso no mencionó siquiera el axioma de constructibilidad ni la hipótesis del continuo, a pesar de que ya poseía desde hacía dos años la idea de los conjuntos constructibles, que satisfacen los axiomas de Zermelo y el axioma de elección, proporcionando así una prueba de la consistencia relativa de este último. En la noche del 14 al 15 de junio se le ocurrió la idea de la prueba de la consistencia relativa de la hipótesis del continuo.

Hahn había muerto, Menger y Carnap habían emigrado, Gomperz había sido obligado a retirarse. Gödel ya no tenía colegas con los que hablar. Zilsel, un estudiante de Gomperz, trató de mantener la llama del Círculo con unas reuniones en casa del filósofo Victor Kraft. En una de ellas, a finales de enero de 1938, Gödel impartió su última conferencia vienesa, sobre cuestiones de consistencia en lógica, a petición de Zilsel. Por esas mismas fechas, von Neumann volvió a visitar a Gödel en Viena, animándolo a volver a Princeton e inquiriendo por sus avances en la cuestión del continuo.

En marzo de 1938, unos días después del *Anschluss* hitleriano sobre Austria, Gödel escribió a Veblen sin hacer comentario alguno sobre el golpe nazi. Gödel nunca lo menciona en su correspondencia, como si no se enterase de lo que pasaba a su alrededor. Gödel daba la impresión a sus conocidos de vivir esos años turbulentos como un zombi o extraterrestre, sin enterarse casi de los dramáticos desarrollos políticos y de las tragedias humanas que tenían lugar a su alrededor. En abril, su permiso para enseñar en la universidad (*Lehrbefugnis*) caducó y no fue renovado.

En septiembre, y tras casarse por lo civil, Gödel partió solo para América, sin ni siquiera pedir permiso para ausentarse el curso académico siguiente. Simplemente se marchó a América y escribió desde Princeton al decano comunicándole que pasaría el semestre de invierno allí.

Gödel llegó a Nueva York el 15 de octubre. Inmediatamente se trasladó a Princeton, se estableció en un hotel y se puso a trabajar. A finales de ese mes volvió a Nueva York a una reunión de la American Mathematical Society (AMS), en la que conoció a Emil Post. Du-

rante el otoño de 1938, Gödel presentó sus nuevos resultados sobre la hipótesis del continuo en un cursillo en el IAS de Princeton.

En enero de 1939, Gödel se trasladó a la Universidad de Notre Dame (en South Bend, al norte de Indiana y cerca de Chicago), donde permaneció hasta finales de mayo dando unas clases de teoría de conjuntos y de lógica, estas últimas junto a Menger. Menger era profesor de esa universidad católica y había promovido la invitación de Gödel, que este había aceptado por dinero, pues el público en Notre Dame no tenía el nivel intelectual que el de Princeton, e incluso había una resistencia difusa a la lógica moderna, resultante de la tradición tomista, impulsada por Maritain. Allí escribió también un artículo sobre la consistencia relativa de la hipótesis generalizada del continuo para la National Academy of Sciences y terminó de pulir el manuscrito de su monografía de 1940 sobre teoría de conjuntos. El 14 de junio se embarcó para Europa.

Desde principios de septiembre de 1939, Alemania, que ya había anexionado Austria el año anterior, había invadido Polonia y entrado en guerra con Francia y Gran Bretaña. En la Universidad había sido revocado el permiso de docencia de Gödel y había problemas para renovárselo, dado que el curso anterior se había ausentado sin permiso. Para acabar de complicar las cosas, recibió una citación para el servicio militar, lo cual, además de no ser ninguna broma en tiempos de guerra, dificultaba su posible petición de permiso de salida. Sin trabajo ni permiso de salida, estaba en una delicada situación económica. El 20 de septiembre, Gödel cerró su cuenta corriente en Princeton y transfirió el saldo a Austria. Solicitó ser readmitido como *Dozent neuer Ordnung* (docente del nuevo orden), pero se le echó en cara el haber hecho su tesis doctoral con un judío, Hahn, y el ser apolítico. Tanto Gödel como su mujer tenían lazos afectivos con Viena y temían separarse definitivamente de sus familias. De todos modos, su situación era insostenible. Se le había acabado el dinero ahorrado. Un día, paseando con Adele cerca de la universidad, fue apaleado por gamberros nazis, que lo tomaron por judío. Quería irse, pero tenía dificultades tanto para que los alemanes lo dejasen salir como para que los americanos le diesen un visado de entrada.

El 15 de diciembre dio una conferencia en la Universidad de Göttingen sobre su prueba de la consistencia de la hipótesis del continuo, en la que rendía homenaje a Hilbert. De allí fue a Berlín, donde finalmente obtuvo los visados de salida para él y Adele, gracias también a las cartas del director del IAS. (Alemania todavía no estaba en guerra con Estados Unidos, y más bien tenía interés en mantener buenas relaciones diplomáticas con América.) Hacía meses que Gödel trataba de obtener también un visado de entrada en EE UU, pero tenía dificultades para que se le concediese el visado sin cuota reservado a profesores, pues los burócratas consideraban que no era profesor, dado que no daba clases regularmente. Finalmente, y por presión del IAS, el consulado americano en Viena les concedió el visado a él y a su mujer.

Sus visados de salida especificaban que solo podían salir de Alemania por Rusia y Japón, a través del tren transiberiano. En efecto, Alemania estaba en guerra con Francia y Gran Bretaña, por lo que la ruta más corta, por el oeste, no era practicable, mientras que de momento todavía estaba vigente el pacto germano-soviético de no agresión (firmado en agostó de 1939 y solo roto por Hitler en junio de 1941). El 15 de enero de 1940 los Gödel salieron de Berlín y, tras un viaje agotador atravesando toda la Unión Soviética, llegaron el 2 de febrero a Yokohama, en Japón. Por aquel entonces, Japón todavía no había entrado en guerra con Estados Unidos (lo haría en diciembre de 1941, mediante el ataque a Pearl Harbor, en Hawaii) y todavía se mantenía el tráfico marítimo entre los dos países. Tras varios días de espera y descanso en Yokohama, Kurt y Adele embarcaron para América, llegando a San Francisco el 4 de marzo. Luego atravesaron en tren el continente americano hasta Nueva York y Princeton.

Ya instalado en América, y sin conocimiento de las autoridades americanas, Gödel siguió tramitando su petición de permiso de ausencia por Austria y su reincorporación al nuevo cuerpo docente, cosa que consiguió cuando a finales de junio de 1940 fue aprobada en Viena su solicitud de ser nombrado *Dozent neuer Ordnung* y su nombre pasó a figurar en el registro de personal de la universidad. Al mismo tiempo, y sin conocimiento de las autoridades alemanas, solicitó la nacionalidad americana, que finalmente le fue concedida ocho años más

tarde. De todos modos, se instaló definitivamente en Princeton y, durante los treinta y siete años de vida que le quedaban, ya no volvería a salir de los Estados Unidos.

Consistencia relativa de AC y GCH

Si A es un conjunto, designamos mediante $|A|$ el número cardinal o cardinalidad de A. A y B tienen la misma cardinalidad, es decir, $|A|=|B|$, si existe una biyección entre A y B. A tiene menor cardinalidad que B, $|A|<|B|$, si existe una biyección de A en un subconjunto propio de B, pero no a la inversa. Los números cardinales de dos conjuntos finitos, A y B, siempre son comparables. Si $|A|=n$ y $|B|=m$ (donde n y m son números naturales), siempre ocurre que $n<m$ o $n=m$ o $m<n$. Cantor extendió este principio de tricotomía a cualesquiera cardinalidades, finitas o infinitas. Aunque A y B sean conjuntos infinitos, sus cardinalidades son comparables: $|A|<|B|$ o $|A|=|B|$ o $|B|<|A|$. En 1878, Cantor había mencionado la tricotomía de los cardinales como algo obvio, pero de hecho nunca logró probarlo. En 1883 propuso el principio del buen orden como algo también evidente: cualquier conjunto puede ser bien-ordenado (aunque a veces no seamos capaces de encontrar o definir ese buen orden, como ocurre con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales). Este principio era crucial en la teoría cantoriana: solo si todo conjunto puede ser bien ordenado podemos asegurar que cada conjunto tiene un tipo de orden (un ordinal) y una cardinalidad. Pero esta manera de postular la existencia de entidades matemáticas (el buen orden, en este caso) sin poder definirlas ni construirlas ni ejemplificarlas, tropezó con la resistencia de muchos matemáticos. Cantor trató denodadamente de probar su principio del buen orden, pero nunca lo consiguió.

El principio del buen orden fue probado por Zermelo en 1904, usando para ello lo que luego se ha llamado el axioma de elección (en inglés, *Axiom of Choice*, abreviado AC). Este axioma dice: para cada familia de conjuntos disjuntos entre sí y no vacíos hay una función que elige un y solo un elemento de cada uno de esos conjuntos. Del axioma

de elección se sigue no solo el teorema del buen orden, sino también el de tricotomía (o comparabilidad de los cardinales), así como otros muchos teoremas de la teoría de conjuntos y otras ramas de la matemática. Cuando, en 1908, Zermelo axiomatizó por primera vez la teoría de conjuntos, incluyó entre sus axiomas el axioma de elección. Aunque la mayoría de los matemáticos aceptaron el axioma de elección sin especiales escrúpulos, a algunos les inquietaba la posibilidad de que al socaire de este axioma se introdujeran contradicciones en la matemática clásica. Sin embargo, Gödel probó que estas inquietudes no estaban justificadas: si los otros axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, es imposible que el añadido del axioma de elección introduzca contradicción alguna en la teoría. A eso lo llamamos la consistencia relativa del axioma de elección.

Así como los números cardinales 0, 1, 2, 3, etc., miden la cardinalidad de los conjuntos finitos, así también los números cardinales $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc., miden la cardinalidad de los conjuntos infinitos. $\aleph_0$ es precisamente la cardinalidad del conjunto de los números naturales (o de cualquier otro conjunto denumerable). La cardinalidad del conjunto de los números reales (o la de las partes del conjunto de los naturales, o la de los puntos de un continuo n-dimensional: línea, plano, etc.) es $2^{\aleph_0}$. La cardinalidad inmediatamente mayor que $\aleph_0$ es $\aleph_1$. Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, es decir, que no hay cardinalidades intermedias entre la del conjunto de los números naturales y la del continuo, es decir, que cualquier conjunto infinito de números reales o es denumerable o tiene ya la cardinalidad del continuo. Esta conjetura cantoriana se llama la hipótesis del continuo. La *hipótesis generalizada del continuo* (abreviada GCH, por su nombre en inglés) dice que, en general, no hay ninguna cardinalidad intermedia entre la de un conjunto infinito dado A, $|A| = \aleph_\alpha$, y la del conjunto de sus partes, $|\wp A| = 2^{\aleph_\alpha}$. Cantor había probado que $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$, para cada ordinal α. Por tanto, $2^{\aleph_\alpha}$ es distinto de $\aleph_\alpha$. La hipótesis generalizada del continuo dice que $2^{\aleph_\alpha}$ es la cardinalidad siguiente a $\aleph_\alpha$, es decir, que para cada ordinal α: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Cantor había enunciado la hipótesis del continuo en 1878. Pero ni él ni nadie había logrado probarla, a pesar de que Hilbert había colocado el problema del continuo (es decir, demostrar o refutar la hipóte-

sis del continuo) en el primer lugar de su famosa lista de 100 problemas por resolver presentados al congreso mundial de matemáticos de 1900. En 1938, Gödel probó que la hipótesis del continuo no puede refutarse, es decir, que su negación no se sigue de los otros axiomas de la teoría de conjuntos, a los que puede añadirse sin producir contradicción alguna, a no ser que aquellos ya fuesen contradictorios de por sí.

Las pruebas por Gödel de la consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis del continuo se basan en la definición de un subuniverso de conjuntos constructibles, cuya idea se le ocurrió a Gödel durante el verano de 1935, en Viena. En otoño le comunicó personalmente su descubrimiento a von Neumann. Luego trató de ampliar la prueba hasta abarcar también la consistencia relativa de la hipótesis del continuo y, después de darle muchas vueltas, en junio de 1937 encontró la manera de hacerlo. De nuevo fue von Neumann —de visita en Viena ese verano— la primera (y, durante un tiempo, la única) persona a la que Gödel reveló su descubrimiento y le contó los detalles. Durante la primera mitad de 1938, Gödel desarrolló su prueba de la consistencia relativa de la hipótesis del continuo, mientras preparaba su próxima estancia en América. A mediados de octubre llegó a Princeton, y empezó a poner por escrito su prueba. En noviembre envió un anuncio de sus resultados a los *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Durante los meses de noviembre y diciembre de 1938 expuso detalladamente su prueba en un cursillo que impartió en el IAS. El joven George Brown fue contratado para tomar los apuntes oficiales, que luego serían distribuidos a los asistentes. A finales de diciembre volvió a presentar sus resultados en una reunión de la American Mathematical Society. A principios de 1939 escribió una primera versión de su prueba, que fue publicada ese mismo año bajo el título de «Consistency proof for the generalized continuum-hypothesis» (Prueba de consistencia para la hipótesis generalizada del continuo) en los *Proceedings of the American Academy of Sciences*. Luego pulió los apuntes tomados por Brown de su curso, que contenían una segunda versión de la prueba, y que finalmente fueron publicados en 1940 como monografía con el título *The Consistency of the Axiom of Choice and of the*

Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory (La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos).

En el camino hacia la demostración de que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son independientes de los otros axiomas de la teoría de conjuntos, Gödel había recorrido la mitad, mostrando que esos dos principios son compatibles con los axiomas habituales. Faltaba recorrer la otra mitad, demostrando que también la negación de esos principios es compatible con los axiomas, pero eso ya no lo consiguió Gödel (a pesar de sus ímprobos esfuerzos durante los diez años siguientes). Quien finalmente logró probarlo fue Paul Cohen, en 1963. A pesar de su independencia, ambas tesis tienen un *status* social distinto. Mientras que el axioma de elección es aceptado por la mayoría de los matemáticos y forma parte de la axiomatización estándar de la teoría de conjuntos, la hipótesis del continuo no es utilizada como axioma, y el mismo Gödel sospechaba que era falsa (aunque no está claro lo que pueda significar su falsedad, una vez probada su independencia).

La prueba de la consistencia relativa de AC y GCH

El procedimiento de prueba de consistencia relativa mediante la construcción de un modelo interno ya había sido aplicado por von Neumann en 1929 al axioma de regularidad o buena fundación. Ahora lo aplicaba Gödel con insólito rigor en relación al axioma de elección y a la hipótesis del continuo. Gödel presentó dos versiones de su prueba (o, si se prefiere, dos pruebas), la primera publicada en 1939, la segunda en 1940. Las principales diferencias entre ambas versiones son las siguientes: en la primera prueba se toma como basé la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF), mientras que en la segunda se usa la teoría de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG). La primera prueba se lleva a cabo en el metalenguaje, considerando que ciertas fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos son a su vez conjuntos para los cua-

les valen los axiomas y teoremas. Se afirma, eso sí, que el concepto de «conjunto constructible» podría ser definido dentro de la teoría misma de conjuntos, de modo que la prueba se efectuase en el lenguaje de la teoría, pero de hecho ello solo se lleva a cabo en la segunda prueba.

La idea fundamental de los conjuntos constructibles aparece en la primera versión de la prueba con más claridad que en la segunda. Recordemos la función R de von Neumann, que permitía definir la jerarquía acumulativa:

$$R(0) = \varnothing$$
$$R(\alpha + 1) = \wp R(\alpha)$$
$$R(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} R(\beta) \qquad \text{[para cualquier ordinal límite } \lambda\text{]}$$

Observemos más de cerca la definición de R y, en especial, su segunda línea, donde se define para un ordinal siguiente. Nos dice que $R(\alpha+1) = \wp R(\alpha)$. Con cada nuevo ordinal damos el salto del conjunto $R(\alpha)$ al conjunto de sus partes, $\wp R(\alpha)$. Se trata de un salto gigantesco (como el del conjunto de los números naturales al continuo). Carecemos de una intuición clara acerca de lo que sea el conjunto de las partes de un conjunto infinito dado. No sabemos cómo construir o considerar todas las partes de un conjunto infinito. ¿No sería posible sustituir esa segunda línea por otra que nos permitiese dar un paso más modesto, de un conjunto dado no al conjunto de todas sus partes, sino solo al de aquellas de sus partes que sepamos cómo definir o construir? Es lo que hizo Gödel en la primera versión de su prueba, introduciendo la jerarquía constructible mediante una función L, parecida a R, pero más modesta y comprensible. L se define por recursión transfinita:

$$L(0) = \varnothing$$
$$L(\alpha + 1) = Dfl\, L(\alpha)$$
$$L(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} L(\beta) \qquad \text{[para cualquier ordinal límite } \lambda\text{]}$$

donde $Dfl\ L(\alpha)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $L(\alpha)$ que son definibles mediante una fórmula (de primer orden) de la teoría de conjuntos con una sola variable libre, con eventuales constantes para

elementos de $L(\alpha)$ y cuyas variables cuantificadas varían sobre $L(\alpha)$. Un conjunto X es constructible si, para algún ordinal β, $X \in L(\beta)$. La tesis o axioma de constructibilidad dice que todo conjunto es constructible.

La segunda versión de la prueba, aunque menos intuitiva, es la más elaborada, pues se presenta con todo detalle en la monografía de 1940, cuyo contenido resumimos a continuación.

El capítulo primero presenta los axiomas de la teoría de conjuntos que se va a investigar. Aunque la axiomatización más antigua y difundida de la teoría de conjuntos es la de Zermelo-Fraenkel, Gödel incorpora a la suya dos rasgos esenciales de la de von Neumann: la distinción entre clases y conjuntos (todo conjunto es una clase, pero una clase solo es un conjunto si es a su vez elemento de otra clase) y la axiomatización finita (es decir, la evitación de esquemas axiomáticos), así como también el axioma de regularidad. Las ideas de von Neumann fueron expuestas y desarrolladas con especial claridad por Bernays, y luego adoptadas y precisadas por Gödel. Por eso la axiomatización resultante suele conocerse con el nombre de von Neumann-Bernays-Gödel, abreviadamente NBG.

El capítulo segundo empieza por probar como teorema el esquema de existencia de clases que en otras axiomatizaciones se toma como axioma: para cada fórmula $\varphi(x)$ (que sea normal, es decir, cuyas variables cuantificadas se refieran todas a conjuntos) existe una clase A, tal que para cada conjunto x, $x \in A$ si y solo si $\varphi(x)$. $\exists A \forall x\ (x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ es un esquema, es decir, una manera de expresar comprimidamente infinitos teoremas distintos, tantos como distintas fórmulas $\varphi(x)$ hay que cumplen la condición citada. Gödel prueba este teorema —en la forma $\exists A \forall x_1 \ldots x_n\ (\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n))$— a partir de los ocho axiomas —fórmulas concretas— del grupo B expuestos en el capítulo anterior. El resto del capítulo expone someramente las definiciones y teoremas elementales típicos.

El capítulo tercero trata de los números ordinales, introducidos a la manera de von Neumann, según la cual cada número ordinal es el conjunto de todos sus predecesores y está bien ordenado por la relación $\in$. Además expone el teorema de recursión transfinita, que nos permite definir funciones de números ordinales.

El capítulo cuarto trata de los números cardinales. El cardinal de un conjunto dado se identifica con el mínimo ordinal con el que ese conjunto es biyectable.

En el capítulo quinto, finalmente, llegamos al cogollo del asunto, construyendo el famoso modelo interno de los conjuntos constructibles.

En esta segunda versión de la prueba, Gödel no define la operación *Dfl* de la primera, sino que hace algo equivalente. Todas las clases que se pueden construir en su teoría de conjuntos se pueden formar por aplicaciones sucesivas de los ocho axiomas del grupo B, correspondientes al esquema de existencia de clases. Gödel define ocho operaciones binarias, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_8$, correspondientes a esos ocho axiomas. Luego establece una biyección J entre la clase $9\times\Omega\times\Omega$ de todos los triplos (i, α, β) (donde $0\leqslant i\leqslant 8$; $\alpha, \beta\in\Omega$) y la clase Ω de todos los ordinales. Finalmente define una función F para todos los ordinales del siguiente modo. Puesto que a cada ordinal γ corresponde (mediante J) un cierto triplo (i, α, β) (donde $0\leqslant i\leqslant 8$; $\alpha, \beta\in\Omega$), basta con definir $F(\gamma)$ en función de ese triplo (i, α, β), lo cual puede hacerse así: si $1\leqslant i\leqslant 8$, entonces $F(\gamma)=\mathcal{F}_i(F(\alpha), F(\beta))$ —con esto formamos todos los conjuntos definibles a partir de conjuntos ya construidos—; si $i=0$, entonces $F(\gamma)=\{F(\delta)|\delta<\gamma\}$ —con esto reunimos todos los conjuntos construidos hasta un cierto momento en un solo conjunto—. Para terminar, Gödel define la clase L de los conjuntos construibles como la clase de todos los conjuntos que resultan de F, es decir, $L=\{F(\alpha)\mid\alpha\in\Omega\}$.

Una clase es constructible si todos sus elementos son constructibles y si su intersección con cualquier conjunto constructible es un conjunto constructible. Esto le permite construir el modelo constructible Δ. Supongamos que la teoría de conjuntos Σ que Gödel ha axiomatizado en el primer capítulo sea consistente. Entonces posee un modelo (C, U, E), donde C es el universo de las clases; U, el de los conjuntos (por tanto $U\subseteq C$), y E, la relación $\in$ entre clases.

$\Delta=(C', L, E')$, donde C' es el universo de las clases constructibles y E' la relación $\in$, restringida a clases constructibles. Δ es un modelo interno de la teoría de conjuntos, el modelo constructible.

En el capítulo sexto se prueba que el modelo constructible Δ satisface todos los axiomas de la teoría de conjuntos Σ, lo cual se demues-

tra mostrando que las relativizaciones a L de todos los axiomas de Σ son teoremas deducibles de Σ. Relativizar una afirmación sobre conjuntos a L significa restringirla a los conjuntos constructibles, es decir, sustituir $\forall x\varphi(x)$ por $\forall x(x \in L \rightarrow \varphi(x))$ y $\exists x\varphi(x)$ por $\exists x(x \in L \wedge \varphi(x))$.

La tesis de constructibilidad es la tesis que dice que todos los conjuntos son constructibles, es decir, que $V=L$. Gödel no pretende que la tesis de constructibilidad valga en general para todos los conjuntos, pero en el capítulo séptimo, prueba que vale para el modelo constructible Δ. Δ no es solo un modelo de Σ, como se mostró en el capítulo anterior, sino también de $\Sigma \cup \{V=L\}$. Con esto queda probada la consistencia relativa de $V=L$ respecto a Σ.

En el capítulo octavo, finalmente, prueba Gödel que de $\Sigma \cup \{V=L\}$ se siguen como consecuencias tanto el axioma de elección como la hipótesis generalizada del continuo. Por tanto, cualquier modelo de $\Sigma \cup \{V=L\}$ será también un modelo del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo. En resumen, si la teoría de conjuntos (sin tesis de constructibilidad, sin axioma de elección y sin hipótesis generalizada del continuo) es consistente, entonces tiene un modelo, un submodelo del cual es el modelo constructible, que además de a Σ, satisface también a la tesis de constructibilidad, al axioma de elección y a la hipótesis generalizada del continuo, cuya consistencia relativa respecto a Σ queda así demostrada.

ADELE Y OTROS TEMAS DE LA VIDA PRIVADA

Ya de escolar, Gödel se había prendado de la hija de unos amigos de sus padres, una belleza excéntrica diez años mayor que él. Sus padres lo obligaron a romper esa relación. Más tarde, como estudiante en Viena, y residiendo con su hermano en la Langengasse, conoció allí cerca a Adele Porkert (1899-1981), hija de un fotógrafo (llamado Nimbursky), casada, seis años mayor que él y bailarina de un club nocturno. Aunque sus padres se volvieron a oponer a lo que consideraban una relación inconveniente, Gödel acabaría casándose con ella en 1938.

Su amiga Adele lo acompañó en algunas de sus repetidas estancias de cura y reposo en balnearios y sanatorios. Estuvo con él, por ejemplo, unos meses que Gödel pasó en 1936 en un sanatorio para enfermedades nerviosas en Rekawinkel, cerca de Viena. Gödel, que empezaba a mostrar síntomas de hipocondría y paranoia, temía ser envenenado, y ya entonces Adele empezó a actuar como su probadora de comida, rol que ya siempre conservaría.

Cuando, a finales de 1937, Gödel tuvo que dejar el caro piso del que disponía su familia en Viena, y alquiló por primera vez por su cuenta un apartamento más modesto en Grinzig, en las afueras de Viena, enseguida lo compartió con su amiga Adele. El 20 de septiembre de 1938, él y Adele se casaron por lo civil y sin apenas ceremonia. Nadie sabía nada de su larga relación con ella, y el anuncio de la boda pilló por sorpresa a sus familiares y amigos. Gödel habría querido que Adele lo hubiese acompañado en el viaje a América que emprendió a continuación, pero dificultades económicas y de conseguir pasajes lo impidieron a última hora.

Gödel, acompañado de Adele, se trasladó definitivamente a Princeton a comienzos de 1940, tras realizar un largo y complicado viaje en tren y barco por Rusia, Japón y el océano Pacífico. Morgenstern y varios otros de los colegas de Gödel en el IAS eran judíos cultos y refinados, y quedaron decepcionados al conocer a Adele, la mujer de Gödel, a la que consideraban vulgar, inculta, de voz estentórea y poco adaptable a la vida intelectual y social de Princeton. De todos modos, Adele siempre aguantó todas las rarezas de Kurt y formaron una pareja bien avenida.

En verano de 1941, Kurt y Adele veranearon durante dos meses en una pensión de la costa de Maine, cercana al parque nacional de Acadia. Gödel estaba encantado por el paisaje y la comida, así como por el aire fresco y limpio que allí se respiraba. En cuanto volvió a Princeton, se mudó de apartamento, por los «malos gases» que exhalaba (según él) la calefacción, pero en el nuevo apartamento siguió con los mismos problemas. El director del IAS pidió a un médico que examinase el estado mental de Gödel. Al verano siguiente, en 1942, los Gödel volvieron a Maine, a otra pensión cercana a la costa. Según

recordaba la dueña de la pensión[5], Gödel parecía un hombre huraño y siempre perdido en sus propios pensamientos. No salía de su habitación durante el día, y ni siquiera dejaba entrar al personal de limpieza a hacer las camas (Adele las hacía) o limpiar. Por la noche daba largos paseos solo, despertando las sospechas de los vecinos de que pudiese ser una espía alemán, tratando de contactar a algún barco enemigo. Kurt y Adele no saludaban ni hablaban con los demás huéspedes y apenas comían. De regreso a Princeton, Gödel escribió una carta a la dueña de la pensión, acusándola de haber robado las llaves de su maleta. Y volvió a mudarse de apartamento. A veces, coincidiendo con las visitas a Princeton de ciertos conferenciantes o matemáticos, Kurt no salía de su apartamento, por miedo a que tratasen de asesinarlo.

Adele tenía unos cuarenta años cuando se casó en segundas nupcias con Gödel y temía que los problemas mentales de Kurt fueran hereditarios. A Kurt, por su parte, le preocupaba la posibilidad de que el cáncer manifestado repetidamente en la familia de Adele fuera hereditario. Sea ello como fuera, el caso es que Kurt y Adele nunca tuvieron hijos. Adele, sin embargo, tenía fuertes instintos maternales.

Antes de obtener la nacionalidad americana y de hacer el correspondiente juramento, los aspirantes han de prestar declaración ante el juez en presencia de dos testigos, para mostrar que saben lo que dicho acto significa. En diciembre de 1947 le tocó el turno a Gödel. Sus testigos serían Einstein y Morgenstern. Gödel se preparó con característica seriedad para las posibles preguntas del juez sobre el sistema político americano, e incluso creyó descubrir una inconsistencia en la Constitución americana, con gran alarma de Morgenstern, que temía que Gödel se pusiera a hablar de eso ante el juez y echase a perder su proceso de nacionalización. Einstein y Morgenstern hicieron cuanto pudieron por mantener a Gödel entretenido y callado y afortunadamente contaron con la complicidad del juez de Trenton, Forman, que cortó a Gödel cuando este ya empezaba a exponer sus teorías políticas. Finalmente, el 2 de abril de 1948 tanto

[5] Referencias en Dawson, pág. 160.

Gödel como Adele prestaron juramento y se convirtieron en ciudadanos americanos.

Adele, que se encontraba mucho menos a gusto en Princeton que Gödel, tenía una ganas enormes de regresar a Viena y ver a su familia. En 1947 hizo el viaje a Viena, donde permaneció siete meses. Gödel se concentró durante ese tiempo en sus investigaciones sobre el tiempo en la relatividad general. Más tarde, Adele repitió sus visitas a Austria, cosa que nunca hizo Gödel, con gran pesar de su madre.

Los continuos cambios de apartamento de Gödel se acabaron en 1949, cuando Adele se empeñó en que compraran una casa propia que salió a la venta por entonces, aunque fuera endeudándose. Se trataba de un bungalow moderno en una calle tranquila, en la que se instalaron y que Gödel ya nunca abandonaría hasta su muerte. Se le acabaron las histerias con los «malos aires» y se quedó tranquilo a vivir y trabajar allí. La decoración —según los vecinos y colegas— era de mal gusto, y Adele más bien espantaba a las visitas, pero eso no le importaba a Gödel, huraño y poco social.

Gödel siempre creyó en posibilidades misteriosas del espíritu. En una carta a su madre (de 1952) dice que «todo el mundo posee la capacidad de predecir los números que surgirán en un juego de azar, aunque algunos la tienen solo en medida muy escasa»[6]. Por entonces pensaba que su mujer Adele poseía esa capacidad en grado sumo, lo cual pretendía haber verificado incontestablemente unas doscientas veces. También creía en la posibilidad de la telepatía. Dawson comenta: «Con independencia de lo que uno piense de tales creencias en la percepción extrasensorial, es importante subrayar lo bien que encajan con la creencia de Gödel de que la mente es distinta de la materia y con su posterior defensa del platonismo matemático».

Gödel incluso creía en fantasmas y estaba dispuesto a embarcarse en especulaciones teológicas, como la del argumento ontológico, que formalizó con gran interés, aunque no llegó a publicarlo para que no se lo considerase creyente. Gödel siempre mantuvo una activa correspondencia con su madre, a la que cada mes escribía largas cartas y le

[6] Referencias en Dawson, pág. 30.

enviaba dinero. En las cartas a su madre, Gödel hablaba de temas que no tocaba en sus escritos públicos, por ejemplo, de religión. Aunque ambos sentían antipatía por el catolicismo dogmático y odiaban el fascismo clerical que el partido socialcristiano había establecido en Austria antes de la guerra, Gödel tenía fuertes inclinaciones teológicas. Cuando su madre le preguntaba por su opinión acerca de si hay otra vida después de esta, Gödel contestaba que sí. Defendía su creencia en la vida en ultratumba con el flojo argumento de que en el mundo todo está racionalmante organizado y no tendría sentido que la vida se acabara tan pronto, con la mayor parte de las potencialidades intelectuales del individuo aún por desarrollar. Pensaba que en la otra vida seguiremos recordando lo que hemos aprendido en esta y alcanzaremos un estadio de gran claridad de ideas, una especie de paraíso intelectual. Gödel mostraba en sus cartas a su madre una mezcla de elementos del cristianismo con otros del optimismo decimonónico sobre el progreso indefinido, sintomático de un gran aislamiento intelectual.

La madre de Gödel le echaba en cara que no viniese nunca a verla a Viena. En vez de ello, en 1958, Gödel invitó a su madre a ir de visita a Princeton, cosa que hizo junto con Rudolf, el hermano de Kurt. La visita le gustó, y la repitió otras tres veces, antes de su muerte. Su madre murió en julio de 1966, a los ochenta y seis años. Él no fue a verla a Viena, a pesar de sus peticiones en ese sentido, y tampoco fue a su entierro, al que sí asistió, en cambio, Adele, que estaba en Europa y agarró en el entierro una bronquitis. Gödel concluyó que asistir a entierros solo sirve para agarrar bronquitis.

Gödel comía poco y era muy delgado para su altura. Nunca pesaba más de cincuenta y cuatro kilos. Tenía problemas estomacales, reales o imaginarios, y padecía de estreñimiento crónico, que combatía tomando laxantes, cuyo consumo registraba diariamente. Se conservan cinco gruesas carpetas llenas de papeles al respecto, que informan sobre su estreñimiento y su ingesta de laxantes en los últimos treinta años de su vida. En los años sesenta, Gödel se sentía mal, comía poco, era anoréxico e hipocondriaco y tomaba muchas medicinas. Portaba una bolsa de bicarbonato sódico y a veces un despertador que le recordase cuán-

do tomar las numerosas píldoras —la mayoría autorrecetadas— que llevaba consigo. Estaba obsesionado con su estreñimiento. Cuando su madre vino a visitarlo desde Viena y le preguntó si quería algo, Gödel le encargó tubos para lavativas.

FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

Las entidades de las que habla la matemática pura (los conjuntos, los números, las funciones, los espacios, las variedades diferenciales) parecen muy distintas de las células, las rocas y las estrellas que constituyen el mundo físico, y su modo de existencia parece tener poco que ver con el de las sillas y otros objetos reales. En la antigüedad clásica, Platón postuló un mundo aparte de formas puras y eternas, un *kósmos noetós* (mundo inteligible) inaccesible a la percepción sensible, pero accesible a la intuición intelectual, que, según Platón, es un recuerdo de lo que vimos antes de nacer. En la filosofía de la matemática actual se conoce con el nombre de platonismo (o realismo platónico) no la doctrina que el Platón histórico de hecho expuso, sino simplemente la tesis de que las entidades abstractas de la matemática existen en el mismo sentido fuerte que las entidades concretas del mundo físico. Uno de los pocos defensores decididos del platonismo en el siglo XX —y sin duda el más famoso— fue Gödel.

No está claro cuándo Gödel empezó a adoptar dicha posición. El 30 de diciembre de 1933, durante su primera estancia en América, impartió una conferencia en Cambridge (Mass.) ante la convención anual de la Sociedad Matemática Americana sobre «The present situation in the foundation of mathematics» (La situación presente de la fundamentación de las matemáticas). Su texto, publicado póstumamente[7], es interesante para conocer la evolución de la filosofía gödeliana de la matemática, pues en él se muestra aún distante del platonismo extremo que más tarde adoptaría. Después de discutir las formalizaciones de la teoría de tipos y de la teoría de conjuntos y las cuestiones de las

[7] En K. Gödel, *Collected Works*, vol. III, págs. 45-53.

pruebas no constructivas de existencia y de las definiciones impredicativas, Gödel dice: «El resultado de la discusión precedente es que nuestros axiomas, si se interpretan como enunciados con significado, necesariamente presuponen un tipo de platonismo, lo que no puede satisfacer a una mente crítica y ni siquiera produce la convicción de que sean consistentes. Sin embargo, y por otras razones, es muy implausible que impliquen contradicciones». Es implausible, porque se llevan manejando mucho tiempo sin que se haya encontrado contradicción alguna. Como señala Solomon Feferman en su introducción a la edición del texto, esta declaración de Gödel en 1933 parece desmentir sus muy posteriores (1967-1968) declaraciones a Hao Wang en el sentido de que él siempre fue un platonista convencido.

Desde el otoño de 1937, Gödel estuvo siempre buscando una prueba de la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo. Desde la primavera de 1940, una vez instalado definitivamente en Princeton, redobló sus esfuerzos para obtenerla, pero no lo consiguió. En 1942, en vista de que no avanzaba en sus pruebas de independencia, decidió cambiar de tema y dedicarse más a la filosofía. Aceptó el encargo de Paul Schilpp de escribir una contribución al volumen de la serie *Library of Living Philosophers* (Biblioteca de los filósofos vivientes) dedicado a Bertrand Russell. Como siempre, Gödel se atrasó considerablemente en la entrega de su manuscrito, por lo que ya no llegó a tiempo para que Russell pudiera replicarlo. En una nota añadida al final de sus réplicas, Russell se limitaba a explicar su falta de respuesta al artículo de Gödel por la tardanza en recibirlo, la falta de tiempo para contestar y el hecho de que él mismo ya no se dedicaba activamente a la lógica desde hacía dieciocho años. El artículo de Gödel, titulado «Russell's mathematical logic» (La lógica matemática de Russell), fue publicado en 1944 en el volumen *The Philosophy of Bertrand Russell*, editado por Schilpp en la serie citada.

Ya vimos que Russell hizo suyo el programa logicista de Frege y trató de llevarlo a la práctica en *Principia Mathematica*, donde redujo lo esencial de la matemática clásica a la teoría de tipos más los axiomas de infinitud y reducibilidad (lo que equivale a reducir la matemática

clásica a la lógica más la teoría de conjuntos). Gödel sometió a análisis y crítica la filosofía de la lógica de Russell, expuesta sobre todo en las dos introducciones (a la primera edición de 1910, y a la segunda de 1927) de *Principia*. Gödel criticaba la tendencia russelliana a prescindir de las entidades abstractas y a considerar nuestras afirmaciones sobre ellas como meras *façons de parler*. Russell había pretendido hacer una teoría sin clases, pero solo lo había conseguido a base de aceptar la existencia de tantos conceptos (o 'funciones proposicionales') como clases, con lo que se limitaba a poner distintos collares a los mismos perros. En la segunda edición de *Principia* había pretendido prescindir de los conceptos de tipos superiores, pero solo lo lograba a costa de admitir sentencias de longitud infinita (incluso innumerable), con lo que el collar de las clases pasaba al perro de las sentencias infinitamente largas.

Las sentencias infinitamente largas, los conceptos y las clases son intercambiables e igualmente abstractos (excepto «para una mente infinita», como dice irónicamente Gödel). En cualquier caso, ni la noción russelliana de 'función proposicional', ni la gödeliana de concepto quedan suficientemente aclaradas. Según Russell, una función proposicional se obtiene a partir de un enunciado cuando sustituimos un nombre propio por una variable. Si nos tomamos en serio dicha definición, resulta que solo puede haber tantas funciones proposicionales como enunciados (o sentencias o proposiciones), es decir, un número infinito numerable, mientras que hay una infinidad innumerable de clases (incluso ya de subconjuntos de números naturales, pues, por el teorema de Cantor, $|\wp\omega| > |\omega| = \aleph_0$). Por tanto, la identificación de las clases con las funciones proposicionales no puede funcionar. Los conceptos gödelianos tampoco quedan delimitados. A veces parece que Gödel piensa en las clases de von Neumann (un concepto de conjuntos sería una tal clase), mientras que otras insiste en que son algo objetivo y casi inefable que el espíritu humano capta por intuición intelectual, y cuya mejor comprensión permitiría descubrir nuevos axiomas que resolvieran los problemas abiertos de la matemática.

Por esas mismas fechas (en 1943), Russell había pasado por el IAS de Princeton y se había entrevistado con Gödel, Einstein y Pauli.

Aunque no habían hablado de lógica, Russell se quedó sorprendido al encontrarse con que Gödel era «un platónico en estado puro». En efecto, en su contribución al volumen de Schilpp, Gödel concluía que el intento russelliano de prescindir de las clases se salda en un fracaso. Las entidades abstractas son imprescindibles. Gödel aprovechaba también la ocasión para exponer su propia filosofía (para entonces ya decididamente platónica) de la lógica: las clases y conceptos son objetos reales, que nosotros no construimos, sino que nos limitamos a caracterizar o describir. Por ello Gödel no veía inconveniente en aceptar definiciones impredicativas y criticaba el principio del círculo vicioso («no se puede aceptar una totalidad que contenga elementos definibles solo en función de esa totalidad»), introducido por Russell para excluir las definiciones impredicativas, tan denostadas por Poincaré. Este principio arruina la pretensión de *Principia Mathematica* de reducir la matemática a la lógica e incluso hace imposible una gran parte de la matemática moderna misma, lo cual —según Gödel— «más bien sugiere la falsedad del principio que la de la matemática clásica».

Posteriormente, Charles Chihara[8] ha sometido a crítica contundente los argumentos con que Gödel pretendía defender su platonismo ontológico: «Incluso si ... coincidimos con Gödel ... en que no es posible una reducción nominalista de las matemáticas, eso no nos compromete a aceptar el platonismo ontológico. ... Uno no se siente inclinado a decir que tenemos que creer en la existencia de fantasmas simplemente porque alguna teoría de fantasmas ... exige su existencia». Además, «el razonamiento de Gödel parece conducir a una masiva explosión demográfica de nuestra ontología: si usamos la intuición matemática para postular objetos matemáticos, parece que también podríamos usar la 'intuición teológica' para postular ... objetos como los ángeles». Comentando estas críticas, Dawson escribe: «Irónicamente, sin embargo, Gödel creía en la existencia de fantasmas —con independencia de cualquier teoría que exigiese su existencia— y probablemente tampo-

[8] En C. Chihara, *Ontology and the Vicious-circle Principle*, Ithaca (Nueva York), 1973.

co habría tenido escrúpulos en aceptar la validez de las intuiciones teológicas».

El artículo de Gödel sobre Russell empieza y termina aludiendo a Leibniz, cuyo proyecto de *characteristica universalis* no sería utópico. Una vez acabado dicho artículo, Gödel se dedicó con gran interés al estudio de Leibniz, por quien sentía una admiración no exenta de elementos paranoicos. Gödel pensaba que los grandes proyectos lógicos leibnizianos de la *characteristica universalis* y del *calculus ratiocinator* habían sido llevados a cabo por el mismo Leibniz, aunque no se habían publicado, debido a una conspiración internacional para impedirlo. En 1949 volvió a obsesionarse por Leibniz. Convenció a Morgenstern para que ellos dos, conjuntamente, solicitaran una subvención para microfichar todos los manuscritos inéditos de Leibniz (que estaban en Hannover) y llevarlos a Princeton, donde estarían libres de las manos de los conspiradores. El plan tropezó con diversas dificultades. Al final el proyecto salió adelante, pero su ejecución no fue encargada a Gödel, sino al profesor Schrecker, que microfichó todo el material leibniziano de Hannover y lo depositó en la biblioteca de la Universidad de Pennsylvania, lo que no hizo sino confirmar las sospechas de Gödel sobre la conspiración antileibniziana.

En 1946, Gödel se comprometió a escribir un artículo expositivo sobre la problemática de la hipótesis del continuo para la revista *American Mathematical Monthly*. Gödel, como de costumbre, lo entregó con un año de retraso. El resultado fue «What is Cantor's continuum problem?» (¿Qué es el problema del continuo de Cantor?), publicado en 1947.

La hipótesis generalizada del continuo (GCH) es la conjetura, formulada por Felix Hausdorff en 1908 (el mismo año en que Zermelo axiomatizó la teoría de conjuntos), de que entre un cardinal infinito cualquiera $\aleph_\alpha$ y el cardinal $2^{\aleph_\alpha}$ no hay ninguna cardinalidad intermedia, es decir, que para cada α: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. El problema del continuo es el problema de determinar si esta hipótesis es verdadera o falsa. Si su negación se siguiera de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, podríamos considerar que la hipótesis es falsa. Pero Gödel había probado en 1938 que su negación no se sigue de los axiomas. Alternativa-

mente, si la hipótesis GCH se siguiera de los axiomas, podríamos considerarla verdadera. Pero Paul Cohen probó en 1963 que ese no es el caso. Por tanto, ahora sabemos que GCH es independiente de los axiomas usuales, algo que Gödel, con seguro olfato, ya sospechaba en 1947 (es decir, diecisiete años antes de que se probase).

En mi opinión (no en la de Gödel), con la prueba de la independencia de la hipótesis del continuo, en cierto modo el problema mismo del continuo ha desaparecido. Ni la fórmula que la expresa ni su negación son deducibles en el sistema formal de la teoría axiomática de conjuntos. Los axiomas conjuntistas habituales son compatibles tanto con ella como con su negación, por lo que podemos extender la teoría en ambas direcciones, si queremos, sin contradecirnos y sin cambiar nuestras intuiciones o las aplicaciones usuales de la teoría. Pero, lo mismo que Frege cuarenta años antes se había resistido a aceptar que pudiese haber diversas geometrías, insistiendo en que solo una podría ser verdadera, así también Gödel se negaba a aceptar que pudiese haber diversas teorías de conjuntos alternativas é insistía en que solo una podía ser verdadera.

Hoy en día solemos considerar que la teoría elemental de conjuntos (caracterizada por los axiomas habituales) es como el tronco de un árbol que puede ramificarse en diversas direcciones, correspondientes a las distintas respuestas que queramos dar a las cuestiones abiertas e indecidibles en función de esos axiomas. Cada una de estas respuestas alternativas representa una fijación distinta del significado de las nociones conjuntistas. Como escribió Cohen en 1990, sobre la hipótesis del continuo «habrá artículos filosóficos, pero no creo que ningún artículo matemático vaya a decir que hay otra respuesta distinta que la respuesta de que es indecidible». Repasando la situación presente para el *Journal of Symbolic Logic*, Kanamori concluía en 1996 que «la situación de la hipótesis del continuo es hoy exactamente como la situación del axioma de las paralelas y de las geometrías no-euclídeas»[9]. Por tanto, todas estas teorías alternativas de conjuntos son extensiones distin-

[9] A. Kanamori, «The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen», *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2: págs. 1-71 (1996).

tas de la teoría elemental, y no parece tener sentido decir que una de ellas sea verdadera y las demás falsas, lo cual no es óbice para que uno pueda preferir alguna extensión particular por todo tipo de razones, desde las estéticas hasta las pragmáticas.

La misma problemática surge respecto a la pregunta de cuántos conjuntos hay, de cuán grande es el universo conjuntista. Así, ciertos pensadores austeros y prudentes, como Quine, prefieren atenerse a la modesta teoría gödeliana de los conjuntos constructibles (añadiendo el axioma $V=L$), que basta para todas las necesidades de la matemática usada en la física. Sin embargo, otros espíritus más audaces y lanzados, como Woodin, prefieren hinchar la teoría lo más posible, añadiendo una sucesión de axiomas cada vez más potentes (cada uno de los cuales implica a los anteriores, es independiente de los anteriores y es implicado por los siguientes, por lo que es consistente, si el siguiente lo es): existe $\aleph_1$, existe un cardinal inaccesible, existe un cardinal de Mahlo, existe un cardinal débilmente compacto, existe un cardinal de Ramsey, existe un cardinal medible, $o(\kappa)=2$, $o(\kappa)=\kappa^{++}$, existe un cardinal de Woodin, existe un cardinal supercompacto... En la intención de estos autores, se trata de llegar hasta el límite mismo de la inconsistencia, quedándose solo a un paso del precipicio, se trata de postular tantos conjuntos como sea posible sin contradecirse, aunque tan inflada postulación no sirva para nada [10], por la mera grandeza y belleza del edificio conceptual resultante. Obviamente, tal actitud se sitúa en las antípodas de la navaja de Ockham («no hay que multiplicar las entidades sin necesidad»), aunque no deja de tener su encanto.

Gödel pensaba que los signos del formalismo conjuntista se refieren a entidades abstractas objetivamente existentes con independencia

[10] En un contexto más técnico que este, no podríamos decir, sin más, que esos axiomas no sirven para nada. Aunque no aporten nada a la matemática usada en la física, sirven para dar respuesta (e incluso la respuesta deseada) a ciertas preguntas formulables en la teoría descriptiva de conjuntos acerca de si los conjuntos de ciertas clases (como los conjuntos proyectivos, o los definibles con parámetros reales y ordinales) tienen ciertas propiedades (si son determinados, si son medibles en el sentido de Lebesgue, si tienen la propiedad de Baire, etc.), preguntas que son importantes en dicha teoría descriptiva.

de nuestras teorías. Por eso consideraba que la pregunta de si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa tiene sentido por sí misma. Si los axiomas habituales de la teoría de conjuntos dejan esa pregunta sin respuesta, ello solo significa que esos axiomas son insuficientes y que en el futuro tendrán que ser complementados con nuevos axiomas que permitan decidir esta y otras cuestiones abiertas de la matemática. ¿En qué podemos basarnos para buscar nuevos axiomas de la teoría de conjuntos? Según Gödel, en dos cosas: en la intuición matemática (que corresponde a la percepción sensorial) y en el apoyo indirecto que presta a una hipótesis (tanto en la física como en la matemática) el hecho de que se sigan de ella consecuencias verificables (por ejemplo, resultados numéricos computables), difíciles de obtener sin ella, y de que no se sigan de ella consecuencias indeseables. Gödel sospechaba que la hipótesis del continuo es falsa, pero para dar certeza a esa sospecha necesitamos introducir nuevos axiomas y, previamente, necesitamos aclarar nuestros conceptos y profundizar en nuestras intuiciones intelectuales sobre lo que sea un conjunto.

En 1964, Gödel solo accedió a la petición de Benacerraf y Putman de introducir su trabajo sobre el continuo en la antología *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* a condición de introducir algunas modificaciones y añadidos, y en septiembre de 1966 escribió otro suplemento que ya no llegó a ser publicado. Entre tanto, en 1963, Cohen había demostrado no solo la independencia de GCH, sino también que $2^{\aleph_0}$ (es decir, la cardinalidad de $\wp\omega$ o de $\mathbb{R}$) podía ser —*a nuestra* elección— un alef (un cardinal transfinito) arbitrariamente grande de cofinalidad no numerable[11]. Gödel había esperado que nuevos axiomas que postulasen la existencia de grandes cardinales arrojarían luz sobre esta cuestión, pero Levy y Solovay probaron en 1967 que, para todos los grandes cardinales κ propuestos (incluidos los medibles), la existencia de κ es compatible tanto con la hipótesis del continuo como con su negación. (Con referencia al universo conjuntista construido como jerarquía acumulativa por recursión transfinita sobre los ordina-

[11] Es decir, podía ser $\aleph_1$, o $\aleph_2$, o $\aleph_3$, o cualquier otro cardinal transfinito, excepto los de cofinalidad numerable, como $\aleph_\omega$.

les *à la von Neumann* y representado mediante un cono invertido que comienza con ∅, podríamos decir que los axiomas de grandes cardinales afectan a la altura del cono, mientras que GCH afecta a su anchura). Por eso, en 1967, Gödel reconocía que todos los axiomas propuestos de grandes cardinales «no son suficientes para responder a la pregunta sobre la verdad o la falsedad de la hipótesis del continuo de Cantor».

Ya en 1946, en su trabajo sobre el continuo, Gödel reiteró su filosofía platonista de la matemática con gran contundencia. Las paradojas conjuntistas no deben hacernos dudar de la realidad de los conjuntos matemáticos más de lo que las ilusiones ópticas nos hacen dudar de la realidad de los objetos físicos. En el suplemento a la segunda edición del artículo, de 1964, seguía considerando que el caso de la independencia de la hipótesis del continuo en teoría de conjuntos era muy diferente del de la independencia del axioma de las paralelas en geometría y seguía elaborando su platonismo: «A pesar de lo apartados que están de la experiencia sensible, también tenemos algo así como una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se ve por el hecho de que los axiomas se nos imponen ellos mismos como siendo verdaderos. No veo ninguna razón para tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción de los sentidos, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que las percepciones sensibles futuras coincidirán con ellas y, además, a creer que una cuestión indecidible ahora tiene sentido y puede ser decidida en el futuro».

Gödel había pensado viajar a Austria en verano de 1951 y visitar a su madre y hermano, pero finalmente no lo hizo, con gran decepción de su madre. Su renuncia se debió en parte a que estaba preparando la importante conferencia Gibbs, que debía impartir en diciembre ante una reunión de la Sociedad Matemática Americana en la Universidad de Brown. Bajo un título genérico, «Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications» (Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de las matemáticas y sus implicaciones filosóficas), presentaba de nuevo una cerrada defensa del platonismo matemático. En los años sucesivos siguió trabajando en el

texto, pero no acabó de encontrar del todo satisfactorios sus propios argumentos y no llegó a publicarlo en vida, apareciendo solo póstumamente [12].

Su viejo amigo Rudolf Carnap estuvo en el IAS entre 1952 y 1954. En 1953, Schilpp escribió a Gödel, solicitando una nueva colaboración, esta vez para el proyectado volumen dedicado a Carnap en la *Library of Living Philosophers*. En 1954, Gödel escribió a Schilpp que ya lo tenía casi terminado, en 1955 que ya faltaba poco, en 1956 que lo terminaría en dos semanas, y así sucesivamente, hasta que en febrero de 1959 comunicó que renunciaba a publicarlo, pues Carnap ya no tendría tiempo de responder y, en cualquier caso, no había logrado clarificar suficientemente la cuestión de la realidad objetiva de los conceptos y sus interrelaciones. En 1934, Carnap había publicado su libro *Logische Syntax der Sprache* (Sintaxis lógica del lenguaje), donde había defendido la tesis, popular en el Círculo de Viena, de que la matemática se reducía a convenciones sobre el uso del lenguaje matemático. El intento de Gödel de refutar esa tesis como contribución al volumen dedicado a Carnap le llevó mucho tiempo y esfuerzo. Dejó escritas seis versiones distintas y numeradas consecutivamente, todas ellas tituladas «Is mathematics syntax of language?», ninguna de las cuales acababa de satisfacerlo. Dos de ellas fueron publicadas póstumamente [13].

Gödel era un gran admirador de Turing, cuya precisión de la noción de algoritmo lo llevó a aceptar la tesis de Church y a resaltar el carácter absoluto de la noción de computabilidad. Los resultados de Gödel sobre incompletud, como los de Turing sobre incomputabilidad, parecían indicar limitaciones de la razón humana, pero, según Gödel, solo indicarían limitaciones de los procedimientos mecánicos o formales, que podrían ser superados por la mente humana. Turing mismo había subrayado la limitación de la memoria y de las capacidades mentales humanas, pero Gödel no quería aceptar esa conclusión. En diciembre de 1969 anunció excitado a Morgenstern que había descu-

[12] En Kurt Gödel, *Collected Works*, vol. III, págs. 304-323.

[13] En Kurt Gödel, *Collected Works*, vol. III, págs. 334-362. Traducidas al español en *Ensayos inéditos*.

bierto 'el error' de Turing, que habría consistido en no tener en cuenta que «la mente, en su uso, no es estática, sino que se desarrolla constantemente. ... Por tanto, aunque en cada etapa de su desarrollo, el número de los estados posibles de la mente es finito, no hay razón para que ese número no converja hacia el infinito en el curso de su despliegue». Nuestra capacidad intelectual se desarrollaría así de un modo ilimitado (e incluso continuaría en la otra vida, según vimos que Gödel le había expresado a su madre por carta).

Según Dawson, «la hipocondría de Gödel era una obvia manifestación de su preocupación obsesiva por sí mismo, y ... su paranoia puede haber surgido de su exageradamente intensa introspección. Según se retiraba más y más en su propio mundo mental, sus temores se intensificaban —y también se intensificaban sus convicciones platonistas y su fe en la habilidad del hombre (y especialmente la suya) para percibir verdades conceptuales» [14].

En los años sesenta, Gödel estudió con mucho interés a Husserl. Tras haber sido elegido miembro de la American Philosophical Society e invitado a dar una conferencia, empezó a prepararla, pero no llegó a ningún resultado satisfactorio y renunció a impartirla. Entre sus escritos publicados póstumamente está un manuscrito [15] de esa época, titulado «The modern development of the foundation of mathematics in the light of philosophy» (El desarrollo moderno de la fundamentación de la matemática a la luz de la filosofía). En él, Gödel empieza por dividir las tendencias filosóficas en derecha (espiritualismo, teología, metafísica) e izquierda (escepticismo, materialismo, positivismo) y señala que la evolución de la filosofía desde el Renacimiento ha ido en la dirección de derecha a izquierda. La matemática ha sido una excepción, pero las dificultades causadas por las paradojas de la teoría de conjuntos han sido usadas como pretexto para moverse también aquí hacia la izquierda. Sin embargo, y según él, esas dificultades han sido exageradas. Las antinomias de la teoría de conjuntos ya «han sido resueltas de un modo completamente satisfactorio y casi obvio para cualquiera que

[14] Dawson, pág. 264.

[15] En Kurt Gödel, *Collected Works*, vol. III, págs. 374-386.

entienda la teoría». La certeza de la matemática debe conseguirse no mediante la manipulación de los símbolos, sino mediante el cultivo del conocimiento de los conceptos mismos. Para ello se necesita una clarificación del significado que vaya más allá de la mera definición y que quizá pueda venir a través de la fenomenología de Husserl.

De hecho, el interés de Gödel por Husserl ya sería recurrente. Al final de su vida seguía estudiándolo e incorporándolo a su propio mundo paranoico. Husserl —según el Gödel anciano de 1972— nunca publicó las conclusiones a las que llegó con su método, impedido por una conspiración mundial, que lo habría matado si hubiese tratado de publicarlas. (Recuérdese su opinión similar respecto a Leibniz.)

Cosmología

Albert Einstein, el creador de la teoría general de la relatividad, y Hermann Weyl, uno de sus mayores expertos, fueron contratados como profesores del IAS ya desde el momento mismo de su fundación. También había pasado por el Instituto Howard Robertson, que (junto con el inglés A. Walker) había deducido en 1935 la forma más general de las métricas para un espaciotiempo espacialmente homogéneo (las métricas llamadas de Friedmann-Robertson-Walker o FRW, que constituyen la base matemática de la cosmología del big bang). Con tan eminente compañía, no es de extrañar que a Gödel acabase contagiándosele el interés por la teoría de la relatividad general y la cosmología. Con Einstein incluso llegó a desarrollar una sincera amistad. Gödel había conocido a Einstein durante su primera estancia en Princeton, en 1933. Más adelante se habían tratado frecuentemente. Ambos estaban considerados como genios extravagantes y un poco fuera del mundo. Ambos compartían la antipatía por el indeterminismo, eran muy inteligentes, iban directamente al núcleo de las cosas y se entendían bien. Daban largos paseos juntos. Y Einstein, famoso y cordial, protegía a Gödel, que tan desvalido parecía. Ya vimos que fue uno de sus testigos para la obtención de la nacionalidad americana.

En 1946, Schilpp, el editor de la *Library of Living Philosophers*, volvió a encargar a Gödel (que ya había participado en el volumen sobre Russell) una nueva colaboración, esta vez para el volumen dedicado a Einstein. Como siempre, Gödel se atrasó considerablemente. Schilpp había esperado poder ofrecer el volumen ya impreso a Einstein con motivo de su setenta cumpleaños (el 14 de marzo de 1949), pero no pudo ser. Y aunque, a petición de Schilpp, Gödel entregó a Einstein su manuscrito el día de la celebración del cumpleaños, a finales de 1949 todavía estaba añadiendo sus últimas notas al artículo. Schilpp había supuesto que Gödel se limitaría a escribir una nota personal sobre su amistad con Einstein, pero le sorprendió con una contribución técnica de gran interés. De hecho, Gödel se tomó muy en serio la tarea. Cuando, en 1947, Adele regresó a Viena a ver a su familia y permaneció allí siete meses, Gödel se concentró en sus investigaciones sobre el tiempo en la relatividad general. Una vez vuelta Adele y trasladado Gödel a su nueva casa, siguió con la cosmología. En su *Nachlass* se han encontrado diveras versiones preparatorias del artículo, que finalmente apareció en 1949 bajo el título «A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy» (Nota sobre la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista), publicado en el volumen *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, editado por Schilpp. En su contribución, Gödel sacaba las consecuencias filosóficas de los resultados matemáticos que acababa de obtener.

Gödel entendía por filosofía idealista aquella que niega la realidad objetiva del tiempo y, por tanto, también la del cambio. Ya la teoría especial de la relatividad había mostrado que no es posible considerar la simultaneidad como una relación absoluta, relativizándola al observador (o, mejor dicho, a las curvas temporaloides o líneas de universo). Con ello el orden temporal queda también relativizado y, según Gödel, la noción de tiempo pierde su objetividad, pasando a ser algo subjetivo, puesto por el sujeto, tal y como había afirmado Kant. En este razonamiento, Gödel confunde la relatividad del tiempo con su subjetividad. Todo lo que es relacional es relativo, pero eso no implica que tenga que ser subjetivo. La propiedad del número 7 de ser menor es una propiedad relativa (es menor que 9, pero no es menor que 4; es

menor o no que otro número, dependiendo de cuál sea ese otro número), pero no es subjetiva. De todos modos, la teoría general de la relatividad permite volver a introducir un tiempo universal, cósmico o absoluto, igual para todos los observadores (para todas las líneas de universo), al menos si usamos los modelos homogéneos e isotrópicos (FRW) usados por la cosmología relativista, como ya salta a la vista en la aparición de la coordenada *t* de tiempo cósmico en la ecuación que define el elemento lineal y, por tanto, la métrica. En efecto, en estos modelos FRW es posible introducir coordenadas que se mueven con las galaxias, que permiten (al menos, en principio) que los diversos observadores sincronicen sus relojes y coordinen sus tiempos locales en un tiempo universal.

Gödel acababa de descubrir soluciones de las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio que determinan un modelo de universo rotatorio en el que es imposible encajar los tiempos locales de los observadores particulares en un tiempo cósmico, y en el que el tiempo pierde su valor absoluto. En ese universo gödeliano es posible viajar por el tiempo tanto hacia adelante como hacia atrás, al menos en principio. A la objeción de que uno podría viajar a su propio pasado y, por ejemplo, matarse a sí mismo o a su padre, lo cual tendría consecuencias contradictorias, Gödel contesta que, en efecto, ese modelo no describe el mundo real y que, en todo caso, ese viaje en el tiempo, incluso según su modelo, no sería factible en la práctica, dada la cantidad exagerada de energía necesaria para llevarlo a cabo. En cualquier caso, el modelo de Gödel no puede representar el mundo real, pues es estacionario y no da cuenta del desplazamiento hacia al rojo del espectro de la luz que nos llega de las galaxias lejanas y que implica un universo dinámico. Tampoco se ha observado la rotación que lo caracteriza. Gödel no pretende que ese universo sea el real, pero —como él mismo escribe— «el mero hecho de la compatibilidad con las leyes de la naturaleza de los universos en los que no se puede distinguir un tiempo absoluto y, por tanto, en los que no puede existir un lapso objetivo de tiempo, arroja algo de luz sobre el significado del tiempo también en los universos en que *se puede* definir un tiempo absoluto».

Al demostrar que la existencia del tiempo cósmico o, equivalentemente, la inexistencia de líneas temporaloides (*time-like*) cerradas (es

decir, de bucles temporales) no es una consecuencia necesaria de la relatividad general, pues no se sigue de las ecuaciones de Einstein, sino que es una mera consecuencia contingente de la distribución fáctica de la materia en el universo, Gödel creía haber probado que la objetividad del tiempo no es una necesidad conceptual. Con eso pensaba haber arruinado la idea de que el tiempo sea objetivo y reivindicado la filosofía idealista, entendiendo por tal la afirmación kantiana de que el sujeto pone el tiempo en la descripción de la realidad. Todo esto es muy discutible, y los presupuestos, argumentos y motivos de Gödel tienen bien poco que ver con los de Kant.

En el curso de sus reflexiones, Gödel había tratado de construir un modelo donde no fuese posible definir un tiempo cósmico. Tendría que ser el modelo de un universo rotatorio. Y lo consiguió. En mayo de 1949 presentó sus resultados cosmológicos sobre universos rotatorios en una conferencia en el IAS, con gran sorpresa de sus colegas, que no sabían que estuviera tan metido en física. Dos meses más tarde, los publicó en *Reviews of Modern Physics* bajo el título «An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation». Chandrasekhar y Wright criticaron sus soluciones en un artículo, pero luego se comprobó que su crítica se basaba en un malentendido.

La solución de Gödel determina un espaciotiempo homogéneo, pero no isotrópico (no igual en todas las direcciones para cualquier observador), ya que está sometido a una rotación de la materia respecto a la brújula de la inercia, es decir, a la tangente de la propia línea de universo. Este universo gödeliano es homogéneo, infinito, está provisto de curvatura constante y es estacionario; en particular, por tanto, no admite expansión ni da cuenta del desplazamiento hacia el rojo de la luz que nos llega de las galaxias lejanas. Por tanto, no es el universo real en que vivimos, sino solo un universo posible (en el sentido de compatible con las leyes de la naturaleza expresadas en las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio).

Cada punto del espaciotiempo cuatridimensional es un evento. Cada dos eventos están unidos por un intervalo (cuyo cuadrado viene dado por la métrica). Según que el valor del intervalo entre los eventos

A y *B* sea negativo, cero o positivo, decimos que el correspondiente vector o intervalo es temporaloide, nulo o espacialoide. Una línea de universo es una trayectoria posible en el espaciotiempo cuatridimensional, es decir, una sucesión continua de eventos unidos por intervalos temporaloides. En los modelos determinados por soluciones con densidad media de materia no nula conocidos hasta entonces, las líneas de universo nunca son cerradas, es decir, si los eventos *A* y *B* están en la misma línea de universo y *A* precede a *B*, no hay ninguna línea de universo en la que *B* preceda a *A*. En el modelo de Gödel, sin embargo, a pesar de que la densidad media de la materia es distinta de 0, son posibles líneas de universo tales que en una de ellas el evento *A* es anterior a *B* (pertenece al pasado de *B*), mientras que en otra *A* es posterior a *B* (pertenece al futuro de *B*), es decir, hay líneas cerradas de tiempo, lo que priva al tiempo de todo carácter absoluto.

El carácter estacionario de ese primer modelo rotatorio lo hacía de entrada incompatible con nuestro universo real en expansión. Ya en su contribución al volumen de Schilpp sobre Einstein, Gödel había indicado que existen otras soluciones a las ecuaciones del campo gravitatorio que determinan universos rotatorios no estáticos, sino dinámicos, en expansión. En agosto de 1950, Gödel habló ante el Congreso Mundial de matemáticos celebrado en Cambridge (Mass.), donde presentó sus nuevos resultados bajo el título de «Rotatory universes in general theory of relativity» (Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad), publicado en las actas. Allí presentó una amplia gama de soluciones de las ecuaciones de Einstein, que determinan diversos universos posibles, todos ellos rotatorios, espacialmente homogéneos y finitos. Sin embargo, en estos nuevos modelos rotatorios ya no hay líneas cerradas temporaloides ni son posibles los viajes en el tiempo. En efecto, en ellos la existencia o no de líneas cerradas temporaloides depende de la rotación, y si la velocidad lineal máxima provocada por la rotación no excede la velocidad *c* de la luz, tales líneas cerradas no pueden existir. En esta comunicación, Gödel se limitó a indicar los resultados alcanzados en su estudio de los universos rotatorios, sin proporcionar las pruebas. Poco después dejó de interesarse activamente por la cosmología.

EL MODELO COSMOLÓGICO DE GÖDEL (1949)

La distribución de la materia en un universo homogéneo e isotrópico (representado por una métrica de tipo FRW) y la curvatura del espaciotiempo por ella determinada permiten definir una familia uniparamétrica de hipersuperficies espacialoides indexadas por el parámetro t que folian el espaciotiempo y son ortogonales a las tangentes de las líneas de universo de las galaxias y los observadores. Cada evento está en una y solo una tal hipersuperficie, con lo que queda definido un tiempo cósmico universal. El modelo de Gödel (que obviamente no es del tipo FRW) hace imposible tal introducción de un tiempo cósmico y permite las curvas temporaloides cerradas, con la consiguiente posibilidad en principio de los viajes hacia atrás en el tiempo.

Un modelo general-relativista del espaciotiempo es un par (M, g_{ab}), donde M es una variedad diferencial cuatridimensional, Hausdorff, C^∞, conectada, paracompacta y sin borde, y g_{ab} es una métrica lorenztiana (de signatura $-, +, +, +$) que satisface la ecuación de Einstein

$$R_{ab}-\tfrac{1}{2}Rg_{ab}+\Lambda g_{ab}=\kappa T_{ab}$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci, R es la curvatura escalar, Λ es la constante cosmológica, $\kappa=8\pi G/c^4$ y T_{ab} es el tensor de estrés-energía.

El modelo rotatorio de Gödel (M, g_{ab}) representa una solución exacta de la ecuación de Einstein para un fluido perfecto sin presión. $M=\mathbb{R}^4$. La métrica g_{ab} viene dada [16] por el elemento lineal ds:

$$ds^2=-dt^2+dx^2-\tfrac{1}{2}e^{2\alpha x}dy^2+dz^2-2e^{\alpha x}dtdy$$

Esta forma cuadrática puede también escribirse como

$$ds^2=-(dt+e^{\alpha x}dy)^2+dx^2+\tfrac{1}{2}e^{2\alpha x}dy^2+dz^2$$

[16] En las fórmulas que siguen, los signos originales del artículo de Gödel están cambiados para ajustarse a la convención ahora habitual de signatura $-, +, +, +$ (en vez de $+, -, -, -$, por él empleada). Véase un cambio similar en Hawking y Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, págs. 168-170.

donde se muestra la signatura. La ecuación de Einstein para un fluido perfecto se reduce a la forma

$$T_{ab}=\rho u_a u_b$$

donde ρ es la densidad promedia de la materia y u es el vector normalizado de velocidad cuatridimensional. El modelo de Gödel es una solución exacta de la ecuación de Einstein si $\alpha^2=8\pi\rho$ y $\Lambda=-\alpha^2/2$.

En Princeton

Ya vimos que el Institute for Advanced Study (IAS) de Princeton había sido incorporado en 1930 como una fundación privada para proporcionar condiciones óptimas de trabajo a personas de excepcional valía intelectual. Empezó a funcionar en 1933 y Gödel fue uno de sus primeros visitantes invitados. Después de tres estancias temporales, en 1933, 1935 y 1938, Gödel se estableció definitivamente en Princeton en 1941. Aunque hasta 1953 su *status* jurídico en el IAS era provisional, nadie puso en duda su continuidad en ese paraíso para intelectuales.

Desde la primavera de 1941 hasta 1946, Gödel no volvió a dar conferencias. Primero se dedicó denodadamente a buscar una prueba de la independencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo, que no logró obtener. Luego se interesó más y más por la filosofía. En diciembre 1946 se celebró la Conferencia del Bicentenario de la Universidad de Princeton, dedicada a los problemas de la matemática. Gödel presentó allí sus «Remarks on problems in mathematics» (Observaciones sobre problemas de las matemáticas), donde exponía su búsqueda de nociones absolutas de demostrabilidad y definibilidad y proponía su noción de definibilidad ordinal (en función de ordinales).

Gödel padeció repetidas crisis de salud y depresiones. En febrero de 1951 tuvo de pronto una hemorragia, debida a una úlcera de duo-

deno. Fue rápidamente trasladado al hospital, donde estuvo sometido a alimentación intravenosa y continuas transfusiones de sangre. Aunque estaba convencido de que se iba a morir, sobrevivió. Oppenheimer, por aquel entonces director del IAS, quería alegrarle la vida a Gödel. Decidió proponerlo como candidato al primer Premio Einstein, que se concedería cada tres años. Desde luego, los otros miembros del comité —von Neumann, Einstein y Weil— estaban muy de acuerdo, pero el problema es que ya se lo habían concedido al brillante físico Julian Schwinger. Finalmente se pudo conseguir que lo recibieran los dos. Efectivamente, Gödel se alegró de recibir la primera distinción académica de su vida. Además, los 15.000 dólares del premio le vinieron bien para pagar las facturas del hospital. Poco después fue nombrado doctor honoris causa por las universidades de Yale y Harvard, aunque no por la de Princeton, debido a la rivalidad existente entre esa universidad y el IAS. A finales de 1954 sufrió una fuerte depresión y se convenció de que iba a morir de un ataque al corazón.

Dada su gran reputación científica, es extraño que Gödel tardase tanto en ser promocionado a la categoría de profesor del IAS. Ello se debió en parte a la oposición de ciertos miembros del instituto, como Weil o Siegel, que pensaban que Gödel carecía de la estabilidad mental necesaria. Otros suponían que sería un desastre a la hora de asumir tareas administrativas. Von Neumann se indignaba, y al parecer comentaba: «¿Cómo podemos los demás ser llamados profesores, si Gödel no puede serlo?». En 1953, finalmente, Gödel fue nombrado profesor del IAS. Ese mismo año fue elegido también miembro de la Academia Nacional de Ciencias. Sin embargo, su acceso al profesorado del IAS coincidió con su práctica retirada de la actividad matemática. Desde la conferencia Gibbs que impartió en febrero de 1951, ya no volvió a hablar ante matemáticos, ni a asistir a congresos matemáticos. En el instituto no quería dirigir seminarios y casi nunca asistía a las conferencias de los matemáticas visitantes. Sus únicas publicaciones matemáticas posteriores (como el artículo de *Dialectica* de 1958) son revisiones de trabajos de hacía veinte años.

En abril de 1955 murió Einstein. En agosto del mismo año se descubrió que von Neumann tenía un cáncer de los huesos, que final-

donde se muestra la si
perfecto se reduce a la

donde ρ es la densic
normalizado de veloci
una solución exacta de

Ya vimos que el Ir
había sido incorpora
proporcionar condicic
nal valía intelectual. E
sus primeros visitantes
en 1933, 1935 y 1938,
ton en 1941. Aunque
sional, nadie puso en
tuales.

Desde la primave
conferencias. Primero
de la independencia
nuo, que no logró obt
fía. En diciembre 194
la Universidad de Pri
tica. Gödel presentó
(Observaciones sobre
su búsqueda de noci
dad y proponía su no
dinales).

Gödel padeció re
de 1951 tuvo de pror

mente acabó con su vida en febrero de
grandes amigos y colegas produjeron u
siempre lo habían protegido, y Gödel s
parte Gödel sustituyó su compañía por
Paul Bernays y Georg Kreisel. Clifford
prometedor, a quien Gödel admiraba,
rió inesperadamente de leucemia al
también Veblen, que fue quien había
principio.

En 1962 apareció la primera (y ma
tículo sobre la incompletud de Gödel d
una traducción mejor, que apareció en
(1965), editada por Martin Davis. La tr
taba más satisfecho fue la realizada por
da en la antología *From Frege to Gödel:*
Logic (1967), editada por el mismo va
Quine. Gödel tomó un gran interés en
ción siguió paso a paso durante varios a
jenoort intercambiaron setenta cartas y t
nales para discutir puntos sutiles de la tr

Desde que Gödel probó en 1937 la c
de elección y de la hipótesis del contin
sido capaz de hacer avanzar el tema. En
que el método de los modelos internos
la consistencia relativa no podía servir
En 1963, finalmente, el joven matemátic
independencia del axioma de elección
inventando para ello el nuevo método
Gödel para pedirle su «sello de aprobaci
y lo felicitó, animándolo a publicarla cu
el mayor progreso en la teoría de conjunt
escribió. Gödel se ofreció a presentar el
blicación en los *Proceedings* de la Nation
que él era miembro. Allí se publicó. Por
tuvo una cátedra en Stanford y la medall

Los últimos años

Durante la última década de su vida (1968-1978), Gödel se fue apartando más y más del mundo que lo rodeaba y hundiéndose más y más en la paranoia. Desde el punto de vista de su actividad intelectual, se centró en la determinación y prueba de la 'verdadera' cardinalidad del continuo, que a veces pretendió haber probado que era $\aleph_2$, y en la formalización de la prueba ontológica de la existencia de Dios por San Anselmo. Pronto se encontraron errores fatales en su presunta prueba de la cardinalidad del continuo. Gödel siguió cambiando su manuscrito, corrigiendo su prueba y su resultado y anunciando su pronto envío a los *Proceedings* de la Academia de Ciencias, pero —inseguro como estaba él mismo, y con razón, de sus resultados— nunca llegó a enviarlo. De hecho, Gödel había perdido ya todo contacto con la investigación matemática. En 1970, Yuri Matijasevich había probado la insolubilidad del décimo problema de Hilbert, lo que habría sido de esperar que interesase a Gödel, pues se trataba de un resultado relacionado con un problema de decisión para ecuaciones diofánticas en el que él mismo había estado trabajando en el pasado (y sobre el que había disertado en Princeton ya en 1934). Sin embargo, aislado en el mundo de sus fantasmas y obsesiones, ni siquiera pareció enterarse.

De sus amigos tradicionales, en 1970 solo sobrevivía Morgenstern, que lo cuidaba solícitamente y sufría viendo las continuas crisis físicas y psíquicas por las que atravesaba Gödel. Morgenstern lo protegía y lo visitaba con frecuencia, aunque no ganaba para sustos. Un día encontraba a Gödel delgado y demacrado «como un cadáver». Otros días tenía que oír sus alucinaciones paranoicas, cómo los médicos conspiraban contra él, o cómo alguien penetraba en su casa por las noches y secretamente le ponía inyecciones. Varias veces le pidió cianuro para suicidarse. Luego su salud mejoró y entre julio de 1970 y enero de 1975 Gödel volvió a una relativa normalidad. Apenas trataba con nadie más. Sin embargo, Hao Wang estableció contacto con él y consiguió ser una de las pocas personas con las que hablaba. Entre octubre de 1971 y diciembre de 1972, Hao Wang iba a Princeton cada dos semanas a conversar con Gödel de filosofía y a tomar notas de sus opi-

niones. Resultado de esos encuentros fueron varios libros de Hao Wang —*From Mathematics to Philosophy* (1974), *Reflections on Kurt Gödel* (1987) y *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* (1996)—, en los que entreteje su propia filosofía en torno a los comentarios de Gödel. Estos comentarios incluyen que las cosas han de ser reducidas a las ideas platónicas, que la vida no es reducible a las leyes de la física y que los teoremas de la matemática pura reflejan el orden y regularidad escondidos del universo.

Gödel buscaba siempre dentro de sí mismo la información y la verdad acerca de todo tipo de asuntos, lo que lo llevaba a rechazar como conspiraciones las opiniones de los demás que no coincidían con la suya, incluidas las de los médicos. Él perseguía sus propias obsesiones con su estreñimiento, los laxantes y los enemas. En 1974 tuvo problemas con la próstata y se negó a tratarlos hasta que tuvo que ser llevado al servicio de emergencias del hospital de Princeton, donde se negó a ser operado, como recomendaban los médicos, aunque tuvo que someterse a una caterización para descargar su vejiga. Vuelto a casa, Adele, que estaba inmovilizada en una silla de ruedas, ya no podía ayudarle.

En 1972, Gödel recibió diversos honores, siendo nombrado miembro del Institut de France, de la British Academy y (gracias a Hao Wang) doctor honoris causa por la Universidad Rockefeller de Nueva York. En 1975, la Universidad de Princeton finalmente le ofreció (gracias a Paul Benacerraf) un doctorado h.c., pero Gödel se negó a asistir a la ceremonia de concesión. Tres meses después recibió la Medalla Nacional de Ciencia, que debía entregarle el presidente de los Estados Unidos, pero de nuevo se negó a ir a Washington a recibirla.

A finales de 1975, Gödel sufrió otra grave crisis, mezcla de enfermedad, hipocondría y paranoia, que recordaba a las de 1936 y 1954, pero más fuerte. Además, ya no podía contar con el apoyo eficaz de su mujer, Adele, pues ella misma estaba gravemente enferma y no podía moverse. La enfermera Elisabeth Glinka fue contratada para cuidarla y para ayudar a Gödel con las tareas domésticas, cosa no siempre fácil. Gödel, por ejemplo, le encargaba que comprase naranjas, pero, cuando las traía, las rechazaba como malas, sin probarlas.

Morgenstern siguió soportando las paranoias de Gödel, que cada dos por tres lo telefoneaba para hablarle de las presuntas conspiraciones para matarlo o engañarlo, incluso en 1977, cuando ya el mismo Morgenstern se estaba muriendo de cáncer. Su muerte privó a Gödel de su último amigo e interlocutor. Hao Wang avisó a Gödel de que iba a visitarlo y a llevarle un pollo que su mujer había cocinado. Sin embargo, cuando llegó, Gödel se negó a abrirle la puerta, por lo que, tras vanos intentos, Wang tuvo que dejarle el regalo en la puerta y marcharse, aunque unos meses más tarde logró verlo.

Hacía tiempo que Gödel se negaba a comer y se negaba a ser hospitalizado. Al final, Adele logró convencerlo de que fuera al hospital, donde fue ingresado el 29 de diciembre. Dos semanas después, el 14 de enero de 1978, Gödel murió, oficialmente de «desnutrición e inanición», es decir, de hambre, resultante de una «perturbación de la personalidad». De tanto miedo como tenía a ser envenenado, acabó negándose a comer y sucumbiendo a su propia paranoia.

6
ALAN TURING (1912 - 1954)

INFANCIA Y JUVENTUD

Alan Turing procedía de una familia de clase media esforzada, consciente de su posición social y ligada en su última generación a las actividades del Imperio británico en la India. El Imperio administraba la India mediante un cuerpo especial de funcionarios británicos (el ICS, *Indian Civil Service*), nombrados inicialmente a dedo. Tras la gran reforma liberal inglesa de 1853, el ICS se abrió a todos los ciudadanos mediante exámenes competitivos. Julius Turing (el padre de Alan), después de haber estudiado literatura e historia en Oxford, ingresó en el ICS e hizo el resto de su carrera en la India. En 1896 se incorporó a su puesto de trabajo en la zona de Madras, en el sur de la India. Tras diez años de servicio ininterrumpido, se tomó unas largas vacaciones en Inglaterra. Durante el largo viaje en barco, conoció a Ethel Stoney (la que sería madre de Alan) y se casaron poco después en Dublín. Ethel era también una inglesa de la India, hija del ingeniero principal de los ferrocarriles de Madras y nacida en la misma zona. Julius Turing y Ethel tuvieron dos hijos, John, el mayor, y Alan.

Alan Turing fue concebido en Chatrapur (India) en 1911, pero nació en Inglaterra (en Paddington, Londres), adonde su familia se había trasladado de permiso, el 22 de junio de 1912. En marzo del año siguiente el padre partió para la India, y en septiembre le siguió la madre. Los niños se quedaron en una especie de pensión espartana junto

a la costa al cuidado de los Wards, un militar retirado y su mujer. Aunque recibieron algunas largas visitas de sus padres, la mayor parte de su infancia transcurrió separados de ellos y sin ningún tipo de estímulos intelectuales. John era un niño normal, mientras que Alan pronto empezó a llamar la atención como asocial, ensimismado, desaliñado, indisciplinado, ocurrente y respondón. Incluso su espontáneo interés científico era visto con alarma por su madre, que temía que lo distrajese del latín, en que se basaba el ingreso en la escuela privada.

La principal ambición y seña de identidad de la clase media inglesa con pretensiones era el poder enviar a sus hijos a hacer el bachillerato en una escuela privada (perversamente llamada *public school*), un internado de pago. Entre 1926 y 1931, Turing asistió a la escuela privada de Sherborne. Turing era un alumno atípico. Era muy malo en inglés y latín, tenía dificultades para escribir en limpio y entregaba sus trabajos llenos de borrones y tachaduras. Por otro lado, tenía gran facilidad para las matemáticas, aunque trataba de resolver los problemas por procedimientos originales y con frecuencia se equivocaba por falta de atención a los detalles. También le apasionaba la física y hacía experimentos de química. Leía por su cuenta los libros populares de Einstein y Eddington y llevaba un cuaderno de notas sobre teoría de la relatividad.

El aburrimiento de Turing en la escuela se acabó cuando conoció mejor a Christopher Morcom, un escolar delgado, inteligente y despierto de la clase un año anterior a la suya, al que admiraba y con el que podía compartir todo tipo de ideas e inquietudes intelectuales, y por el que se sintió profundamente atraído. La muerte súbita de Morcom, en febrero de 1930, sumió a Alan en una larga crisis. Pensó obsesivamente en la relación de la mente con la materia y en si la mente de su amigo podría haber sobrevivido a su muerte, cuestión sobre la que escribía cartas a la madre de Morcom.

En 1931, Turing ingresó en el King's College de la Universidad de Cambridge, que le abrió un nuevo mundo de incitaciones intelectuales, en el que por primera vez podía sentirse a gusto. Al año siguiente leyó la obra de von Neumann sobre los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica, en la que descubrió el pensamiento riguroso.

Asistió a cursos de Hardy, Newman, Eddington y otros matemáticos y físicos. También estudió teoría de la probabilidad y lógica.

En su época del King's College descubrió y aceptó que era homosexual. Su compañero James Atkins (matemático y músico) fue su amante ocasional, pero nunca volvió a sentir el amor romántico que había despertado en él Christopher Morcom. Trabajaba mucho, pero hallaba un contrapunto relajante en la práctica del deporte, remando y corriendo sobre todo [1].

Como una máquina

Brillantemente graduado en 1934, en 1935 Turing ganó una beca (*fellowship*) del King's College, que le aseguraba una modesta seguridad económica y una completa libertad de acción durante los siguientes años. Aunque ya había conseguido algunos resultados propios en álgebra y teoría de la probabilidad, Turing quería hacer algo verdaderamente ambicioso. En el Congreso Mundial de matemáticos de 1928, Hilbert había planteado, entre otras, la pregunta de si la matemática es decidible, es decir, si puede haber algún procedimiento automático capaz de decidir cualquier cuestión matemática. En 1935, asistiendo al curso del topólogo Newman, Turing se enteró de que este importante problema de Hilbert, el problema de la decisión o *Entscheidungsproblem,* estaba aún abierto.

La solución del *Entscheidungsproblem* requería una definición precisa del concepto de 'método automático' o algoritmo. Turing se dio cuenta de que lo que caracteriza a un método automático es que el método procede 'mecánicamente', aplicando las instrucciones al pie de la letra, sin intervención alguna de ningún tipo de intuición, espabilamiento o experiencia, procediendo como una máquina. Turing se tomó en serio la metáfora de la máquina. Sería una máquina que trabajaría solamente con símbolos, de un modo determinista, paso a paso. Su

[1] Para todos los aspectos de la vida de Turing, consúltese la magnífica biografía de Andrew Hodges, *Alan Turing: The Enigma.*

memoria tendría la forma de una cinta dividida en cuadros y, en un momento dado, la máquina estaría leyendo o escaneando uno de esos cuadros. La máquina podría estar en un número finito de configuraciones, caracterizadas por su estado interno y el contenido del cuadro escaneado. Cada configuración determinaría el siguiente paso a dar, que a su vez produciría una nueva configuración. Turing percibió una similaridad estructural entre las operaciones de la mente, las series de instrucciones lógicas y las máquinas computadoras abstractas (las concretas todavía no existían en 1936). Así llegó a la caracterización de su máquina (pronto llamada por todos máquina de Turing) como precisión de la noción intuitiva de procedimiento automático o algoritmo.

La noción de máquina de Turing es una idealización matemática útil para probar que ciertas tareas no son automatizables o que ciertas funciones no son computables. Una máquina de Turing es como una computadora digital, pero sin limitaciones de capacidad de memoria ni de tiempo de ejecución. Una función es computable si y solo si hay una máquina de Turing que la computa: si le damos uno o varios argumentos como *input*, la máquina ejecuta una serie finita de pasos programados e imprime como *output* el valor de la función para esos argumentos. Un conjunto (por ejemplo, de fórmulas, como una teoría) es decidible si la correspondiente función característica (que asigna el número 1 a los objetos que pertenecen al conjunto, y 0 a los que no le pertenecen) es computable.

Turing probó también (por un procedimiento diagonal similar al de Cantor) que hay funciones incomputables e introdujo la noción fundamental de máquina universal de Turing. Una máquina universal de Turing es una máquina de Turing capaz de simular a cualquier otra máquina de Turing, es decir, una máquina de Turing U, tal que, para cualquier máquina de Turing T, convenientemente codificada (por ejemplo, mediante una gödelización), y para cada *input* o argumento x, U, aplicada a T y x, produce el mismo *output* o resultado que T, aplicada a x: $U(T,x) = T(x)$. De hecho, una máquina de Turing corresponde más a lo que ahora llamamos un programa, mientras que la computadora misma, capaz de ejecutar cualquier programa, es como una máquina universal de Turing. Con esto Turing definía a nivel abstracto la sepa-

ración de máquina y programa, como un precedente de la arquitectura de von Neumann, posteriormente adoptada por la moderna computación. Además la máquina universal de Turing le permitía probar rigurosamente que hay problemas matemáticos indecidibles, como el problema de determinar si una máquina de Turing dada, empezando a funcionar con una cierta inscripción en la cinta como *input*, se para alguna vez (tras dar un número finito de pasos) o bien si sigue funcionando sin término, sin llegar a pararse nunca. Con ello el problema de Hilbert recibía una solución negativa.

De hecho, Alonzo Church llegó a parecidos resultados (incluyendo la indecidibilidad de la lógica de primer orden) al mismo tiempo que Turing y los publicó antes. Pero la solución de Turing es más completa y su noción de máquina de Turing es mucho más intuitiva que el cálculo de la definibilidad λ, en que basaba Church sus investigaciones. Turing presentó su seminal trabajo «On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem» (Sobre números computables con una aplicación al problema de la decisión) a Newman, que apreció su originalidad e importancia, aunque su publicación se atrasó varios meses por la dificultad de encontrar *referees* (hubo que acudir a Church). Finalmente fue publicado a finales de 1936 en los *Proceedings of the London Mathematical Society*. El título se refiere a la representación de los números reales como decimales infinitos. Por ejemplo, $\pi = 3{,}14159265$ ... Un número real es computable si hay una máquina de Turing que computa su expansión decimal. La mayoría de los números reales son incomputables, lo cual ya se sigue del mero hecho de que hay una infinidad supernumerable de números reales, pero solo una infinidad numerable de máquinas de Turing.

Una función computable puede definirse también como función recursiva[2]. Da igual. Toda definición recursiva es Turing-computable, y a la inversa, toda función computable en el sentido de Turing es recursiva. El hecho de que las nociones de recursividad y computabili-

[2] En el recuadro siguiente se definen las funciones recursivas y las máquinas de Turing. En el recuadro final se introducen los diagramas y se prueba la Turing-computabilidad de las funciones recursivas primitivas.

dad de Turing coincidan, aun partiendo de ideas iniciales bien distintas, de que todas las otras precisiones de la noción de computabilidad propuestas por otros autores, como Church, Post, Markov y Smullyan, hayan resultado también equivalentes, y de que toda función conocida y computable en sentido intuitivo sea también Turing-computable, ha llevado a la conclusión (conocida como tesis de Church) de que el concepto intuitivo de computabilidad queda perfectamente precisado por la noción de computabilidad de Turing (o de recursividad). Mientras que tenemos varias nociones incompatibles de conjunto o de consecuencia o inferencia (y, por tanto, varias teorías de conjuntos y lógicas alternativas), la teoría de la recursión o de la computabilidad parece haber dado unívocamente en el clavo. En este sentido puede afirmarse que es la rama más exitosa de la lógica matemática.

FUNCIONES RECURSIVAS

Las funciones numéricas (es decir, las funciones de números naturales o n-tuplas de números naturales en números naturales, $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, para $n \geq 1$) más elementales son las funciones ahora llamadas recursivas primitivas. Entre ellas se encuentran, por ejemplo, todas las funciones numéricas estudiadas en las escuelas, tales como la adición, la multiplicación y la exponenciación. Se trata de una clase de funciones ya previamente usada por Dedekind, Peano, Skolem, Hilbert y Ackermann, pero caracterizada de un modo exacto por primera vez por Gödel[3] en 1931.

Las **funciones recursivas primitivas** son las funciones numéricas obtenibles a partir de las funciones recursivas primitivas iniciales mediante un número finito de aplicaciones de los procesos de definición por sustitución y de definición por inducción. Para que esta definición tenga sentido, nos queda por indicar cuáles son las funciones recursivas primitivas

[3] En su artículo de 1931, Gödel llamó «recursivas» a estas funciones, pero desde 1936 (en que fueron rebautizadas por Kleene) se las conoce como recursivas primitivas, para distinguirlas (como una subclase propia) de las funciones recursivas en general.

iniciales y en qué consisten la definición por sustitución y la definición por inducción.

Llamamos funciones recursivas primitivas **iniciales** a la función ceroaria constante 0, a la función monaria del siguiente $S(x)=x+1$ y a las funciones n-arias de identificación del i-ésimo miembro de una secuencia de n números $I^n_i(x_1 \dots x_n)=x_i$.

Sea g una función r-aria ($r \geq 1$) y sean $h_1 \dots h_r$ funciones n-arias ($n \geq 0$). Decimos que la función n-aria f está **definida por sustitución** con ayuda de g, $h_1, \dots h_r$ si y solo si para cualesquiera números naturales $x_1 \dots x_n$ ocurre que:

$$f(x_1 \dots x_n)=g(h_1(x_1 \dots x_n), \dots, h_r(x_1 \dots x_n))$$

Sea g una función n-aria ($n \geq 0$) y sea h una función $n+2$-aria. Decimos que la función $n+1$-aria f está **definida por inducción** con ayuda de g y h si y solo si para cualesquiera números naturales $y, x_1 \dots x_n$ ocurre que:

$$f(x_1 \dots x_n, 0)=g(x_1 \dots x_n)$$
$$f(x_1 \dots x_n, S(y))=h(x_1 \dots x_n, y, f(x_1 \dots x_n))$$

Fácilmente se aprecia que todas las funciones numéricas elementales familiares desde la escuela (como adición, multiplicación, exponenciación, factorial, máximo o mínimo) son recursivas primitivas. Por ejemplo, la adición + puede definirse por inducción:

$$x+0=x$$
$$x+S(y)=S(x+y)$$

Una vez comprobado que la adición es recursiva primitiva, resulta obvio que también lo es la multiplicación $\cdot$, que puede definirse por inducción:

$$x \cdot 0=0$$
$$x \cdot S(y)=(x \cdot y)+x$$

Y así sucesivamente con las otras funciones aritméticas elementales. Dada la manera como estas funciones son definidas, es obvio que son computables. Su mera definición ya nos indica cómo ir computando sucesivamente sus valores hasta llegar a aquel que nos interese (por ejemplo, para computar $9+5$, nos dice cómo computar $9+0$, y, en función suya, $9+1$, y una vez obtenido $9+1$, nos indica cómo obtener $9+2$, y así sucesivamente hasta llegar a $9+5$). Es un proceso lento y aburrido, pero seguro. Puesto que todas las funciones numéricas familiares son recursivas primitivas, podría uno conjeturar que todas las funciones computables en sentido intuitivo pertenecen a esta clase tan rica de funciones computables, la clase de las funciones recursivas primitivas. Pero tal conjetura sería falsa.

Aunque todas las funciones recursivas primitivas son computables, no todas las funciones computables son recursivas primitivas. Por ejemplo, la siguiente función f, definida por Ackermann en 1928, es computable en sentido intuitivo (y Turing-computable), pero no recursiva primitiva (recuérdese que S es la función del siguiente):

$$f(0, y) = S(y)$$
$$f(S(x),0) = f(x, 1)$$
$$f(S(x), S(y)) = f(x, f(S(x),y))$$

Una noción más amplia es la de función recursiva, cuya definición requiere la previa introducción del operador μ (el mínimo ... tal que). Hablando de números naturales, $\mu x\varphi(x)$ es el mínimo número x que satisface la condición φ. Si hay algún número que satisface φ, y para cada número natural x es decidible si $\varphi(x)$ o no, entonces $\mu x\varphi(x)$ es computable. Decimos que una función n-aria h es definible por minimalización a partir de una función $n+1$-aria f en caso normal si y solo si para cada $x_1 .. .x_n$ existe al menos un w tal que $f(x_1 ... x_n, w) = 0$, y ocurre que para cada $x_1 ... x_n$:

$$h(x_1 ... x_n) = \mu w[f(x_1 ... x_n, w) = 0]$$

Una **función recursiva** es una función definible a partir de las funciones recursivas primitivas iniciales por un número finito de defini-

ciones por sustitución, por inducción y por minimalización en caso normal.

La función de Ackermann es recursiva. De hecho toda función computable conocida es recursiva.

En 1934, Church introdujo la noción de definibilidad λ de funciones como precisión de la computabilidad en sentido intuitivo. En el mismo año, y tras discutir el tema con Church, Gödel introdujo con la misma intención la noción de función recursiva [4]. En 1936, Kleene probó que ambas nociones eran equivalentes, lo que motivó que Church enunciara la llamada 'tesis de Church', es decir, la tesis de que el concepto de función recursiva (o λ-definible) captura perfectamente la noción intuitiva de función computable. Simultáneamente, Turing desarrollaba su noción de computabilidad, basada en el análisis directo de los pasos de la computación y plasmada en la máquina de Turing. Otros (Post, Markov y Smullyan) definieron la computabilidad de maneras diferentes, pero todas ellas resultaron ser equivalentes, lo que dio especial fuerza a la tesis de Church, que terminó siendo aceptada por todos.

Se puede probar el siguiente teorema: Una función es recursiva si y solo si es Turing-computable (es decir, computable por una máquina de Turing). Nosotros nos limitaremos a demostrar más adelante (en el recuadro final) el resultado más débil y fácil de probar de que toda función recursiva primitiva es Turing-computable.

Máquinas de Turing

La precisión de Turing consiste en proponer que consideremos una función numérica como computable (Turing-computable) si y solo si hay una máquina de Turing que la computa. De igual modo, un conjunto o relación es decidible si y solo si hay una máquina de Turing para decidirlo (es decir, para computar su función característica). Y un conjunto es recursivamente numerable si y solo si hay una máquina de

[4] Gödel la llamó originalmente función «recursiva general».

Turing que lo genera sucesivamente, es decir, si es el recorrido (o contradominio) de una función numérica Turing-computable. Pero ¿qué es una máquina de Turing? No se trata, claro está, de ninguna máquina física, real, no se trata de una computadora construida de metal, plástico y silicio; en todo caso, sería una especie de programa. Se trata de una noción matemática, de una abstracción matemática, de un esquema formal que representa cualquier conjunto de instrucciones unívocas. Una máquina de Turing es como una computadora ideal, sin limitaciones de memoria (con una memoria finita, pero tan amplia como se quiera) y sin limitaciones de tiempo (no trabaja en tiempo real, sino en el tiempo ideal de la matemática, y puede tomarse para sus cálculos cualquier cantidad finita de tiempo, incluso un tiempo superior a la edad del universo), y que trabaja secuencialmente, paso a paso. La máquina puede estar en diversos estados y, en un momento dado, 'lee' o escanea un solo cuadro de su cinta (en la que se inscriben los datos iniciales, los cálculos intermedios y el resultado final). Cada paso que da la máquina depende exclusivamente del estado en el que está y de lo que lee en el cuadro que escanea en ese momento. La máquina de Turing es el autómata (abstracto) determinista por excelencia.

Los números naturales son aquí representados por filas de palotes. Un palote solo, |, representa el 0; dos palotes, ||, el 1; tres palotes, |||, el 2, y, en general, cada número natural n se representa por una secuencia de $n+1$ palotes. Una función numérica monaria f aplica a cada número natural n (representado por $n+1$ palotes) otro número natural $f(n)$ (representado por $f(n)+1$ palotes). Un algoritmo de computación para esa función es un conjunto finito de instrucciones que nos indica cómo hemos de manipular la expresión de partida (el argumento) para llegar, en un número finito de pasos y siguiendo al pie de la letra las instrucciones, a la expresión buscada (el valor de la función para ese argumento). Las instrucciones tienen que ser tan precisas, que hasta una máquina podría seguirlas. Pues bien, imaginemos una máquina que procesa una cinta dividida en cuadrados o cuadros. En cada cuadro de la cinta solo puede haber o bien un palote, |, o nada, *. En un momento dado la máquina ve un solo cuadro de la cinta (el cuadro de trabajo) y se encuentra en un estado determinado. El estado de la máquina y la inscripción del cuadro

de trabajo determinan unívocamente el siguiente paso de la máquina, que consiste necesariamente en una de estas cinco cosas: marcar o inscribir un palote en el cuadro de trabajo (|), marcar el signo vacío (borrando el palote, si es que lo había, y dejando el cuadro como estaba, si carecía de palote)(*), pasar al cuadro de la derecha (r), pasar al cuadro de la izquierda (l) o pararse (s). La tabla o programa de esa máquina consistirá en la indicación de qué es lo que hará la máquina en cada uno de sus estados, tanto si ve | como si ve * en el cuadro de trabajo, y a qué estado pasará a continuación. Y, como ya hemos dicho antes, la máquina de Turing, que no es nada físico, se identifica con su propio programa.

Después de esta motivación informal, he aquí la definición precisa:

Una **máquina de Turing** sobre el alfabeto {|} es una tabla o matriz de 4 columnas y $2m$ filas de la siguiente forma:

1	*	p_{11}	e_{11}
1	|	p_{12}	e_{12}
2	*	p_{21}	e_{21}
2	|	p_{22}	e_{22}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
m	*	p_{m1}	e_{m1}
m	|	p_{m2}	e_{m2}

donde para cada i,j $(1 \leq i \leq m; j=1$ o $j=2)$:

$$p_{ij} \in \{*, |, r, l, s\}$$
$$e_{ij} \in \{1, 2, \ldots m\}$$

Interpretemos esta definición abstracta, fijándonos en una fila cualquiera de la tabla. El primer signo de la fila indica un estado en que puede encontrarse la máquina. El segundo signo, una inscripción posible en el cuadro de trabajo. El tercero, el paso que deberá dar la máquina cuando, encontrándose en dicho estado, vea tal inscripción en el cuadro de trabajo. El cuarto, el estado en el que se encontrará la má-

quina después de haber dado ese paso. Los números 1, 2, 3, ... de la primera columna se interpretan como los distintos estados 'internos' de la máquina. El 1 representa el estado inicial. La máquina empieza a funcionar en el estado inicial y con la cinta vacía excepto una secuencia de palotes (o secuencia de secuencias de palotes, separadas unas de otras por cuadros vacíos, en el caso de una función n-aria para $n \geq 2$) que representa al argumento, y escaneando (teniendo como cuadro de trabajo) el primer cuadro vacío a la derecha del argumento. La máquina procede según las instrucciones incorporadas en su tabla, paso a paso, escribiendo sobre la cinta cuantos resultados intermedios precise. Si todo sale bien (es decir, si la máquina efectivamente computa la función de que se trate), al final la máquina se para, quedándose mirando el primer cuadrado vacío a la derecha de una secuencia de palotes, que representa el valor de la función computada para el argumento inicial.

En Princeton

En Princeton, Turing siguió trabajando en álgebra y teoría de números, en la demostración de que su definición de computabilidad coincide con la de Church y en su tesis doctoral, relacionada con sus 'lógicas ordinales'. En ella, Turing explora lo incomputable e introduce de pasada la idea de una máquina oráculo (que sería capaz de decidir una determinada cuestión indecidible), que luego ha desempeñado un fecundo papel en la teoría de los niveles de incomputabilidad. En efecto, ciertas funciones incomputables son computables relativamente a cierto oráculo, es decir, pueden ser computadas por una máquina de Turing a condición de poder acudir al oráculo a obtener determinada respuesta en cierto paso de la computación. El tema principal de la tesis es la discusión de hasta qué punto podría ser posible superar las limitaciones del teorema de incompletud de Gödel a base de añadir nuevos axiomas a la aritmética. Desde luego, no basta con añadir un axioma *ad hoc* para decidir axiomáticamente la sentencia indecidible, pues en función del sistema axiomático así ampliado se puede construir por el mismo pro-

cedimiento una nueva sentencia indecidible. Tampoco basta con añadir un número finito cualquiera de axiomas. En todo caso, habría que añadir infinitos axiomas, que podrían añadirse de maneras diferentes, correspondientes a los diversos números ordinales transfinitos. Los intentos se complican cada vez más, pero es imposible superar de un modo abarcable las limitaciones de Gödel. Church aprobó los resultados y Turing recibió su doctorado por Princeton en junio de 1938. Su tesis apareció publicada en los *Proceedings of the London Mathematical Society* (1939) bajo el título «Systems of logic based on ordinals».

Von Neumann había visitado Cambridge en 1935. Allí conoció brevemente a Turing como alumno asistente a su cursillo sobre funciones cuasi-periódicas. Precisamente Turing acababa de publicar su primer artículo, una pequeña mejora de resultados previos de von Neumann sobre el tema del cursillo. Luego, en Princeton, Turing siguió asistiendo a las clases de von Neumann, a quien admiraba. Von Neumann y Turing compartían muchos intereses (la lógica, la computación, la formalización, la aplicación de la matemática a la biología) y von Neumann tenía un ojo rápido para reconocer la creatividad intelectual en otros. En 1938, von Neumann ofreció a Turing una plaza de asistente relativamente bien pagada para quedarse en Princeton. Aquello era una gran oportunidad. En una época de depresión económica, en que las plazas eran escasas y la competición enorme, ser asistente de von Neumann, que gozaba de extraordinario prestigio en los Estados Unidos, era la manera ideal de iniciar una exitosa carrera académica en América para un joven matemático. Pero Turing estaba cansado de América y echaba de menos el ambiente bohemio y extravagante de Cambridge, de modo que, tras renovársele la beca del King's College, declinó la oferta de von Neumann, que sin embargo siempre le conservó un gran aprecio. A pesar de sus coincidencias intelectuales, las personalidades de ambos eran casi opuestas. El carácter asocial y ensimismado de Turing, siempre desaliñado y como ajeno al mundo, contrastaba con el genio extravertido y triunfador que era von Neumann, que se movía en fiestas sociales y comités políticos con la misma soltura con que resolvía problemas matemáticos. En cualquier caso, y una vez obtenida su tesis, Turing regresó a Inglaterra en verano de 1938.

DESCIFRANDO CÓDIGOS

Tras su vuelta a Cambridge, Turing residió en el King's College (a lo que tenía derecho, como becario) sin obligaciones específicas. Dio un par de clases, diseñó engranajes para una calculadora mecánica dedicada a calcular la función Zeta de Riemann y asistió como oyente a un curso de Wittgenstein sobre filosofía de las matemáticas. Wittgenstein exigía a sus alumnos que no faltasen a ninguna clase y, con pedante seriedad, recriminó a Turing que un día no asistiese. Turing era el único matemático que acudía a la clase y se convertía en objeto de las críticas de Wittgenstein a esa ciencia. En particular, Turing y Wittgenstein tuvieron varias discusiones sobre el tema de la consistencia. Turing (como cualquier matemático) defendía la absoluta necesidad de la consistencia, mientras que Wittgenstein parecía mostrarse indiferente a las contradicciones. ¿Por qué te molestan las contradicciones en la matemática?, preguntaba Wittgenstein. Entre otras cosas, respondía Turing, porque si aplico una teoría contradictoria a la construcción de puentes, el puente puede caerse. Nunca llegaron a ponerse de acuerdo.

En 1939, Turing aceptó colaborar con el departamento británico de análisis criptográfico. La tensión con Alemania crecía y la guerra se veía venir. Los alemanes transmitían sus mensajes secretos usando una clave o cifra ejecutada mecánicamente por una máquina cifradora llamada Enigma. Se trataba de descifrar esa clave. El 3 de septiembre, Gran Bretaña declaró la guerra a Alemania y Turing abandonó la universidad para dedicarse a tiempo completo a esa tarea urgente de descíframiento, estableciéndose en Bletchley Park, un centro creado con esa finalidad. Las primeras ideas útiles fueron aportadas por unos matemáticos polacos, que llevaban algún tiempo desarrollando una máquina, llamada Bomba, destinada a descifrar las claves de una máquina alemana Enigma particular. Turing enseguida logró generalizar las instrucciones de Bomba y producir una máquina descifradora mucho más eficiente y de aplicación más general. Otro matemático de Cambridge, Welchman, también contribuyó a la tarea. En 1939 los esfuerzos combinados de Turing, Welchman y su equipo condujeron a desentrañar las señales de la aviación alemana de un modo rutinario, pero los mé-

todos de cifrado mucho más complejos de la marina alemana seguían resistiéndose. Una sección (llamada 'pabellón 8') de jóvenes matemáticos en torno a Turing se puso a trabajar día y noche en el intento desesperado de descifrar los códigos de la marina y, sobre todo, de los submarinos alemanes, de vital importancia para el desarrollo de la guerra. Aplicando ideas lógicas y métodos estadísticos sofisticados, Turing y sus colaboradores lo consiguieron. Al margen de cualquier burocracia, todos trabajaban hasta la extenuación y con gran entusiasmo. Turing incluso llegó a proponer el matrimonio a una de sus colaboradoras, Joan Clarke, proposición que ella inmediatamente aceptó, pero que él embarazosamente tuvo que retirar, confesándole su homosexualidad.

Así, desde mediados de 1941 los aliados podían enterarse de las órdenes de los submarinos alemanes y neutralizarlas, de tal modo que, al entrar Estados Unidos en la guerra a finales de año, la batalla del mar parecía ganada. Sin embargo, en febrero de 1942 las máquinas Enigma de los submarinos alemanes adoptaron un método distinto de cifrado, con lo que sus mensajes de nuevo se volvían opacos para los aliados. En noviembre, Turing viajó a Estados Unidos para coordinar los esfuerzos conjuntos angloamericanos en esa vital tarea, así como para asesorar en el sistema de claves secretas para las comunicaciones entre Roosevelt y Churchill. En 1943 se logró de nuevo el desciframiento de los mensajes alemanes, que se mantuvo ya hasta el final de la guerra. Los mandos alemanes creían que las órdenes cifradas que transmitían a sus aviones y submarinos eran indescifrables, pero Turing y sus colegas lograron descifrarlas, lo cual resultó decisivo para la victoria aliada. Turing recibió la OBE (la Orden del Imperio Británico) como reconocimiento.

Turing se convirtió en asesor universal del vasto complejo de Bletchey Park, donde también se realizaban otras tareas de desciframiento (como el de la clave Fish, usada para las comunicaciones del mismo Hitler). Todo tipo de medios humanos, mecánicos y electrónicos se ensayaban frenéticamente hasta dar en el clavo. Turing mismo aprendió mucha electrónica y hacia el final de la guerra se puso a planear la implementación física de la máquina universal de Turing, es decir, el moderno computador digital.

Turing había abandonado desde 1936 sus anteriores veleidades espiritualistas, alentadas por la muerte de su amigo Christopher Morcom y por sus especulaciones juveniles sobre la indeterminación cuántica como base de la intuición, adoptando un punto de vista resueltamente materialista. Aunque él había establecido los límites de lo computable, ahora estaba más fascinado por lo que los computadores podían hacer que por lo que no podían hacer, y pensaba que la máquina universal de Turing, convenientemente programada, podría llevar a cabo la mayor parte de las tareas típicas de la mente humana.

Aunque Turing tenía en la mano todos los elementos y las ideas para publicar el diseño del primer computador digital moderno, de nuevo tuvo que enterarse de que se le habían adelantado en Estados Unidos. La primera publicación de tal diseño, correspondiente al EDVAC, venía firmada nada menos que por von Neumann. Turing, descuidado y desorganizado, nunca fue eficiente en el juego competitivo de establecer prioridades científicas. De todos modos, aguijoneados por la competencia americana, los ingleses no quisieron perder el tren de los nuevos desarrollos. El Laboratorio Físico Nacional (NPL, *National Physical Laboratory*) inglés puso en marcha un proyecto rival, nombrando a Turing científico principal. Turing proyectó un computador que podría servir para cualquier tarea, desde jugar al ajedrez hasta resolver problemas de álgebra o descifrar claves secretas. Desarrolló programas para subrutinas y sugirió cómo la máquina podría expandir sus propios programas abreviados e inició la era de los lenguajes de programación. De todos modos, y en contraste con lo que había pasado durante la guerra, ahora todo iba muy lentamente, y Turing, que era inepto en cuestiones de política institucional, no logró que ni uno solo de sus planes saliera adelante. Frustrado, en octubre de 1947 pidió la excedencia del Laboratorio Nacional y volvió por un año a Cambridge.

Aburrido de sus esfuerzos inútiles en el NPL, y disfrutando de su nueva libertad estudiantil en Cambridge, en vez de dedicarse a publicar sus recientes ideas fundamentales sobre computación, prefirió cambiar también de aires intelectuales y se interesó por los nuevos desarrollos en biología y, sobre todo, en neurología. Acabó escribiendo un artículo pionero sobre lo que ahora se llaman redes neurales, mode-

los computacionales que simulan la capacidad de aprendizaje del cerebro, que envió al NPL, pero solo fue publicado póstumamente. Turing se aficionó cada vez más a la marcha atlética, entrenándose con gran determinación. Corría el maratón cada vez más rápidamente e incluso llegó a considerar su participación en los Juegos Olímpicos de 1948, aunque una herida se lo impidió. En Cambridge encontró nuevos amigos, como Robin Gandy, que luego sería un gran lógico, o como Neville Johnson, el estudiante de matemáticas de su *college* que pronto fue su amante. Turing nunca había escondido su homosexualidad, pero ahora le importaba menos que nunca que se supiese, como si el ambiente de Cambridge lo hiciese sentirse especialmente libre y desenfadado.

¿Puede pensar una máquina?

En octubre de 1948, Turing se mudó a Manchester, donde había aceptado el puesto de subdirector del laboratorio de computación de la universidad, que le había ofrecido Newman. Pero también allí pronto perdió el control del proyecto, cada vez más orientado a las necesidades de la fabricación de la bomba atómica británica. Tuvo la oportunidad de concentrarse en el desarrollo de programas y de la teoría de la programación, pero su reciente año en Cambridge había puesto su mente a funcionar en otras direcciones y se dispersó en su trabajo. Siguió interesándose por la biología, y en especial por el crecimiento de las formas biológicas. ¿Cómo pueden formas tan asimétricas originarse a partir de condiciones inicialmente simétricas? Él lo atribuyó a la no linearidad de las ecuaciones que rigen las reacciones químicas y la difusión, cosa que trató de comprobar mediante la simulación numérica. Su escrito «La base química de la morfogénesis» es un trabajo pionero de la teoría dinámica no lineal. Posteriormente extendió su teoría a objetos esféricos, como los radiolarios, y cilíndricos, como los tallos de las plantas. También trató de explicar la aparición de la serie de números de Fibonacci en muchas formas vegetales. De todos modos, su interés por la computación seguía vivo y creativo, como lo muestran sus pro-

totipos, su investigación de la interrelación entre computabilidad y teoría de grupos y, sobre todo, sus hondas reflexiones sobre las potenciales capacidades mentales de las máquinas.

En 1947, ante el NPL, Turing planteó la cuestión «¿Puede pensar una máquina?». En 1950 publicó en *Mind* su artículo «Computing machinery and intelligence» (Máquinas computadoras e inteligencia), iniciando así la investigación en inteligencia artificial. Turing sostenía que esta cuestión solo puede resolverse experimentalmente, y proponía lo que luego se ha llamado el test de Turing: podemos decir que una máquina piensa si un humán, comunicándose por escrito con ella y con otros interlocutores humanos, es incapaz de distinguir a la máquina de los interlocutores humanos. Otros retos, como la simulación de partidas de ajedrez o la prueba creativa de teoremas, también han sido propuestos. Turing pensaba que en cincuenta años (es decir, hacia el 2000) empezaría a ser posible construir máquinas capaces de enfrentarse a ellos. ¿Hasta qué punto se han cumplido sus predicciones?

El juego de ajedrez siempre ha sido considerado como el más difícil e intelectual de todos los juegos, y los grandes maestros del ajedrez han sido admirados por su gran inteligencia y creatividad estratégica. Alan Turing y su amigo David Champernowne eran grandes aficionados al ajedrez. Ellos inventaron (todavía medio en broma) el primer programa para jugar al ajedrez, *Turochamp*. En 1950, Claude Shannon (el fundador de la teoría de la información) ya esbozó la estrategia para construir un computador capaz de jugar al ajedrez. En 1967 apareció el programa *Mc Hack*, que permitió por primera vez a un computador competir (aunque poco brillantemente) en un campeonato humano de ajedrez. Sin embargo, todos estos intentos estaban aún lejos de poder medirse con la habilidad de un gran maestro. Sin embargo, a mediados de los años ochenta científicos de la Universidad Carnegie Mellon (de Pittsburgh) empezaron a trabajar en serio en un programa potente de ajedrez. Luego se trasladaron al centro de investigación Thomas Watson de la IBM (en el estado de Nueva York), donde se les unieron otros expertos. Tras varios años de arduo trabajo, lograron programar a *Deep Blue*, un potente computador con 32 procesadores trabajando en paralelo y varios chips específicos, que le permiten considerar múl-

tiples desarrollos futuros posibles y evaluar millones de configuraciones por segundo.

Finalmente, en febrero de 1996 se celebró la esperada confrontación entre *Deep Blue* y Garry Kasparov, el campeón del mundo de ajedrez, considerado como el mejor ajedrecista de todos los tiempos. *Deep Blue* sorprendió a todos los observadores ganando la primera partida. Garry Kasparov ganó la segunda, empató en la tercera y finalmente derrotó a la maquina. Todavía (aunque por los pelos) se mantenía la supremacía de la intuición humana sobre la capacidad computacional de la máquina. En mayo de 1997 volvió a repetirse el encuentro. Los científicos habían trabajado durante el año transcurrido en perfeccionar a *Deep Blue* y sus programas, con ayuda de un gran maestro. Si el año anterior *Deep Blue* podía escanear 100 millones de posiciones por segundo, en 1997 llegaba ya a los 200 millones. Si el año anterior Kasparov había aprovechado ciertos fallos de la máquina, en 1997 habían sido corregidos. La dramática confrontación acabó con la derrota de Kasparov y la victoria de los programadores de *Deep Blue*, que se embolsaron los 700.000 dólares de premio. Si incluso el gran Kasparov perdió su desafío contra el computador, ya no hay ajedrecista en el mundo que se le pueda resistir.

Hace tiempo que los computadores realizan pruebas matemáticas triviales, del tipo de los ejercicios que se ponen a los estudiantes, pero se dudaba de su capacidad para encontrar pruebas originales de problemas teóricos que hayan resistido a matemáticos profesionales. A finales de 1996, Larry Wos y William McCune (del Argonne National Laboratory, en Illinois) lograron por primera vez programar un computador de tal manera que resolviera creativamente un problema abierto que los matemáticos humanos habían sido incapaces de resolver.

En efecto, en 1933, E. Huntington había presentado una definición de álgebra de Boole que incluía (además de la conmutatividad y la asociatividad) la siguiente ecuación: $n(n(x)+y)+n(n(x)+n(y))=x$. Su discípulo H. Robbins reemplazó esa ecuación de Huntington por otra algo más simple: $n(n(x+y)+n(x+n(y)))=x$. A los sistemas que satisfacen esa nueva ecuación (además de la conmutatividad y la asociatividad) se los llamó álgebras de Robbins. Es fácil comprobar que toda ál-

gebra de Boole es un álgebra de Robbins. Robbins conjeturó que también vale la inversa, es decir, que toda álgebra de Robbins es un álgebra de Boole, pero ni él mismo, ni Huntington, ni siquiera Tarski pudieron probar ni refutar dicha conjetura. Tarski planteó el problema a otros matemáticos que lo visitaban, y así fue pasando de unos a otros, sin que nadie lo solucionara. S. Winker se dedicó a investigar el tema desde 1980, y en 1992 probó que un álgebra de Robbins que satisfaga la condición de que hay un x y un z tales que $n(x+z)=n(x)$ es también un álgebra de Boole. El 10 de octubre de 1996, el programa de prueba automática EQP («equational prover»), diseñado y dirigido por McCune, probó que cada álgebra de Robbins satisface la condición de Winker. Lo probó indirectamente, obteniendo automáticamente una contradicción a partir de la conjunción de la ecuación de Robbins con la negación de la condición de Winker. Con eso quedaba demostrado que toda álgebra de Robbins es un álgebra de Boole. El problema abierto de la matemática pura cuya solución había escapado a tantos matemáticos famosos había sido finalmente resuelto por un computador. Turing se habría alegrado de este resultado, que confirmaba sus predicciones.

Suicidio

A finales de 1951, Turing llevó a su casa a Arnold, un hombre de diecinueve años que había encontrado en un lugar frecuentado por homosexuales en Oxford Street, Manchester. Volvió a verlo y a acostarse con él un par de veces. A todo esto un amigo de Arnold entró en casa de Turing y le robó. Turing denunció el robo a la policía. Esta se puso a investigar, pero, más que por el robo, se interesó por los encuentros sexuales de Turing con Arnold, que Turing no ocultó y a los que no dio importancia. La policía sí se la dio. Turing fue arrestado el 7 de febrero de 1952, justo el día en que la reina Isabel accedió al trono de Inglaterra. Fue acusado de gran indecencia por tres episodios de sexo homosexual consentido en su propia casa.

El juicio tuvo lugar el 31 de marzo de 1952. Turing nunca quiso negar la relación homosexual que había tenido, como le recomendaban

sus amigos, y constantemente sostuvo que no había nada de malo en ello. Sin embargo, y en aplicación de la ley entonces vigente, fue condenado a una pena de cárcel, conmutada por un tratamiento de inyecciones de estrógeno destinadas a neutralizar su libido y dejarlo impotente. Además, el tratamiento estropeó su buena forma física, que él siempre había cuidado con gimnasia y carreras de maratón, lo que lo sumió en la frustración y la rabia.

Turing continuaba trabajando en secreto y desde fuera en cuestiones de criptografía para el organismo sucesor de Bletchley Park, dirigido por su amigo Alexander. Pero en medio de la histeria de la guerra fría, la homosexualidad era razón suficiente para ser excluido de tales trabajos, pues se suponía que representaba un riesgo de ser sometido a chantaje por espías. Dado a conocer como homosexual, Turing tuvo que abandonar su trabajo para Alexander. La policía de seguridad del Estado empezó a vigilarlo y registró su casa, después que recibiera la visita de un joven noruego. Sus vacaciones en Grecia en verano de 1953 fueron también objeto de gran interés policial.

Solitario, raro e imprevisible, nervioso y comiéndose las uñas, como siempre, pero más frustrado y desesperado que nunca por su mala forma física artificialmente inducida en nombre de una justicia mojigata y absurda y por la exasperante vigilancia policial de que era objeto, Turing decidió que ya no valía la pena seguir viviendo. Se suicidó ingiriendo cianuro potásico. La mujer de la limpieza se lo encontró muerto en la cama el 8 de junio de 1954. En el momento de su suicidio contaba apenas 42 años.

En 1967 se cambió la ley británica, dejando de ser un crimen el sexo homosexual consentido. En 1994 se rebajó la edad del consentimiento hasta los dieciocho años. La condena judicial de Turing ya no podría repetirse. Pero su caso se convirtió en leyenda. Después que Andrew Hodges escribiese su monumental biografía de Turing, el dramaturgo Hugh Whitemore la adaptó para el teatro, escribiendo el drama *Breaking the Code* (Descifrando el código). El famoso actor Derek Jacobi interpretó con gran éxito el papel de Turing en Londres y Nueva York. La obra se representó en varios países, y en 1995 fue adaptada a la televisión.

TABLAS Y DIAGRAMAS DE MÁQUINAS DE TURING

En el recuadro anterior habíamos introducido la noción abstracta de máquina de Turing. En este recuadro final mostramos varias máquinas de Turing (representadas mediante sus diagramas) y las usamos para probar la Turing-computabilidad de las funciones recursivas primitivas.

A continuación presentamos una serie de máquinas de Turing muy simples que realizan determinadas tareas triviales, a partir de las cuales podremos luego construir máquinas de Turing más complicadas. En primer lugar, las máquinas de Turing elementales, a las que llamaremos |, *, *r*, *l*. | escribe un palote y se para. * borra lo que hay en el cuadro (si hay algo) y se para. *r* da un paso a la derecha (es decir, convierte el cuadro inmediato a la derecha en nuevo cuadro de trabajo) y se para. *l* da un paso a la izquierda y se para. He aquí sus tablas

|

1	*	|	2
1	|	|	2
2	*	*s*	2
2	|	*s*	2

*

1	*	*	2
1	|	*	2
2	*	*s*	2
2	|	*s*	2

r

1	*	*r*	2
1	|	*r*	2
2	*	s	2
2	|	*s*	2

l

1	*	*l*	2
1	|	*l*	2
2	*	*s*	2
2	|	*s*	2

Introduzcamos ahora dos nuevas máquinas, *R* y *L*. La máquina *R* va hasta el primer cuadro vacío a la derecha de una palabra o fila de

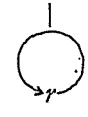
palotes dada y allí se para. La máquina L hace lo propio, pero hacia la izquierda. Representemos por W una palabra (o fila de palotes) cualquiera, por * un cuadro vacío y por ~ un cuadro cualquiera, pongamos encima de la raya horizontal la situación de partida de la cinta, y debajo, la de llegada. Y señalemos mediante una flechita vertical inferior el cuadro de trabajo. Con estas convenciones, podemos representar la acción de las máquinas R y L así:

$$R: \frac{\ldots \overset{\sim}{\uparrow} W * \ldots}{\ldots \sim W \overset{*}{\uparrow} \ldots}$$

$$L: \frac{\ldots * W \overset{\sim}{\uparrow} \ldots}{\ldots \overset{*}{\uparrow} W \sim \ldots}$$

Una máquina de Turing puede representarse mediante su tabla o mediante su diagrama (que indica cómo puede componerse a partir de máquinas más sencillas). He aquí, por ejemplo, tanto la tabla (a la izquierda) como el diagrama (a la derecha) de las máquinas R y L.

R:	1	*	r	2
	1	|	r	2
	2	*	s	2
	2	|	r	2



L:	1	*	l	2
	1	|	l	2
	2	*	s	2
	2	|	l	2

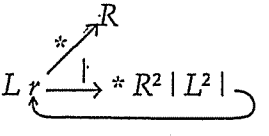
El primer diagrama ha de entenderse así: la máquina R va moviéndose hacia la derecha, mientras observa un palote | en su cuadro de trabajo, pero en cuanto encuentra un cuadro vacío se para en él. El segundo diagrama ha de entenderse así: la máquina L va moviéndose ha-

cia la izquierda, mientras observa un palote | en su cuadro de trabajo; cuando encuentra un cuadro vacío, se para en él.

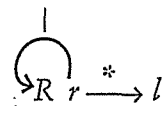
En lo sucesivo, y siguiendo a Hans Hermes, describiremos las máquinas de Turing solo mediante diagramas, ya que resultan mucho más claros e intuitivos que las tablas cuando se trata de máquinas complicadas. Cuando el signo de una máquina lleva un exponente, este indica el número de veces seguidas que ha de funcionar esa máquina, o, equivalentemente, el número de máquinas iguales acopladas una después de otra. Así, por ejemplo, $R^2=RR$, $L^3=LLL$. La flecha que une los signos de dos máquinas indica un reacoplamiento, es decir, que, tras la primera, vuelve a funcionar la segunda. Un palote encima de la flecha indica que el reacoplamiento se produce mientras el cuadro escaneado tras el funcionamiento de la primera máquina contenga un palote. Un asterisco encima de la flecha indica que el reacoplamiento se produce mientras el cuadro escaneado tras el funcionamiento de la primera máquina esté vacío (recuérdese que el asterisco representa un cuadro vacío).

Las máquinas que vamos a presentar son K (máquina de copiar la expresión anterior por la izquierda), $\mathcal{R}$ (máquina de ir a la derecha de una sucesión de palabras, parándose en el primer cuadro vacío del primer par de cuadros vacíos seguidos a la derecha del cuadro inicial), K_n (máquina de copiar la n-ésima palabra, por la izquierda; por tanto, $K_1=K$), T (máquina de trasladar una palabra un cuadro hacia la izquierda), C (máquina de correr una palabra hasta el lugar que ahora ocupa otra palabra a su izquierda) y A (máquina de acabar, borrando los resultados intermedios). He aquí las descripciones esquemáticas de la acción de las máquinas presentadas (a la izquierda) y su diagrama correspondiente:

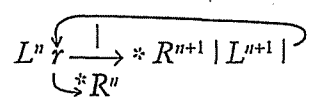
$$K:\ \frac{\ldots * W \overset{*}{\uparrow} \ldots}{\ldots * W * W \overset{*}{\uparrow} \ldots}$$



$\mathcal{R}$: $\dfrac{\ldots \overset{\sim}{\uparrow} W_1 * W_2 * \ldots * W_n * *}{\ldots \sim W_1 * W_2 * \ldots * W_n \overset{*}{\uparrow} *}$



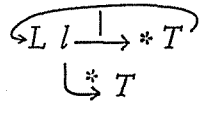
K_n: $\dfrac{\ldots * W_n * W_{n-1} * \ldots * W_1 \overset{*}{\uparrow} \ldots}{\ldots * W_n * W_{n-1} * \ldots * W_1 * W_n \overset{*}{\uparrow}}$



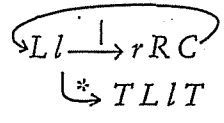
T: $\dfrac{\overset{\sim}{\uparrow} * W *}{\sim W \overset{*}{\uparrow} *}$

$r\,|\,R\,l\,*$

C: $\dfrac{* W_2 * W_1 \overset{*}{\uparrow} \ldots}{* W_1 \overset{*}{\uparrow} *}$



A: $\dfrac{\sim * * W_1 * W_2 * \ldots * W_n * W_{n+1} \overset{*}{\uparrow}}{\sim W_{n+1} \overset{*}{\uparrow} * \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$



Con esto tenemos aquí bastante. Designemos la fila de $n+1$ palotes que representa el número natural n mediante «$\bar{n}$». Ahora nos encontramos en posición de dar la definición precisada de computabilidad recursiva en el sentido de Turing (o Turing-computabilidad) de una función numérica:

La función numérica f es Turing-computable si y solo si hay una máquina de Turing M que cumple la siguiente condición: para cualquier número natural n, si escribimos $\bar{n}$ en la cinta de tal manera que todos los cuadros a su derecha estén vacíos y elegimos como primer cuadro de trabajo el primer cuadro vacío a la derecha de $\bar{n}$, M se pone a funcionar y, tras un número finito de pasos (en los que nunca va más hacia la izquierda que el primer cuadro vacío a la izquierda de $\bar{n}$), se para en

el primer cuadro vacío a la derecha de $\overline{f(n)}$, estando $\overline{f(n)}$ separada de $\bar{n}$ por un cuadro vacío y encontrándose el resto derecho de la cinta vacío. (Lo mismo, mutatis mutandis, en el caso de varios argumentos.) Es decir:

$$M: \frac{\ldots * \bar{n} \overset{*}{\uparrow} \ldots}{\ldots * \bar{n} * \overline{f(n)} \overset{*}{\uparrow} \ldots\ldots}$$

TURING-COMPUTABILIDAD DE LAS FUNCIONES RECURSIVAS PRIMITIVAS

Las funciones recursivas primitivas son las funciones numéricas obtenibles a partir de las funciones recursivas primitivas iniciales mediante un número finito de aplicaciones de los procesos de definición por sustitución y de definición por inducción. Por tanto, para probar que todas las funciones recursivas primitivas son Turing-computables hemos de probar que: (1) Las funciones recursivas primitivas iniciales son Turing-computables. (2) El proceso de definición por sustitución lleva de funciones Turing-computables a funciones Turing-computables. (3) El proceso de definición por inducción conduce de funciones Turing-computables a funciones Turing-computables.

Lema 1: Las funciones recursivas primitivas iniciales son Turing-computables

Las funciones recursivas primitivas iniciales son la función constante 0, la función del siguiente, $S(x) = x + 1$, y para cada dos números naturales $n (n \geq 1)$ e i $(1 \leq i \leq n)$, la función de identificación del i-ésimo miembro de la sucesión, $I_i^n(x_1 \ldots x_n) = x_i$. Estas funciones son Turing-computables por las siguientes máquinas:

Función	máquina para computarla
0	$r \mid r$

$$S(x) = x + 1 \quad : \quad K \mid r$$
$$I_i^n(x_1 \ldots x_n) = x_i \quad : \quad K_{n+1-i}$$

Lema 2: El proceso de definición por sustitución lleva de funciones Turing-computables a funciones Turing-computables

Empecemos por considerar un ejemplo. Sea g una función ternaria y sean h_1, h_2 y h_3 funciones binarias. Las funciones g, h_1, h_2 y h_3 sean Turing-calculables por las máquinas M_g, M_{h_1}, M_{h_2} y M_{h_3}, respectivamente. La función binaria f esté definida por sustitución con ayuda de g, h_1, h_2 y h_3 del siguiente modo:

$$f(x_1, x_2) = g(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2), h_3(x_1, x_2))$$

Diseñamos una máquina de Turing para computar esta función f. Al comenzar, la situación de la cinta será

(1) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 \underset{\uparrow}{*} * * * * \ldots$

es decir, al principio están los dos argumentos y el resto de la cinta está vacío. Primeramente construiremos un «puente» con un palote y copiaremos los argumentos

(2) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \mid * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 \underset{\uparrow}{*} * * \ldots$

A continuación borraremos el palote intermedio (creando así un intervalo de tres cuadros vacíos que señalará a la máquina de acabar, A, dónde habrá de pararse, cuando hayamos obtenido el resultado final), volviendo detrás de los argumentos copiados

(3) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * * * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 \underset{\uparrow}{*} \ldots$

Ahora computamos el valor de h_1 para x_1 y x_2, $h_1\,(x_1, x_2)$:

(4) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * * * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} \overset{*}{\uparrow} \ldots$

Volvemos a copiar los argumentos y computamos $h_2\,(x_1, x_2)$:

(5) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * * * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_2\,(x_1, x_2)} \overset{*}{\uparrow} \ldots$

De nuevo copiamos los argumentos y computamos $h_3\,(x_1, x_2)$:

(6) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * * * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_2\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 *$
$* \overline{h_3\,(x_1, x_2)} \overset{*}{\uparrow} \ldots$

Ahora reunimos los valores $h_1\,(x_1, x_2)$, $h_2\,(x_1, x_2)$ y $h_3\,(x_1, x_2)$, a fin de poder computar el valor de la función g para ellos, tomados como argumentos:

(7) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * * * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_2\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 *$
$* \overline{h_3\,(x_1, x_2)} * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} * \overline{h_2\,(x_1, x_2)} * \overline{h_3\,(x_1, x_3)} \overset{*}{\uparrow} * \ldots$

Con esto estamos en posición de computar $g(h_1(x_1, x_2), h_2\,(x_1, x_2), h_3\,(x_1, x_2))$, es decir, de $f(x_1, x_2)$:

(8) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * * * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * \overline{h_2\,(x_1, x_2)} * \bar{x}_1 * \bar{x}_2 *$
$* \overline{h_3\,(x_1, x_2)} * \overline{h_1\,(x_1, x_2)} * \overline{h_2\,(x_1, x_2)} * \overline{h_3\,(x_1, x_2)} * \overline{f(x_1, x_2)} \overset{*}{\uparrow} * \ldots$

Ahora solo nos queda acabar, borrando los resultados intermedios y llevando el resultado final, $f(x_1, x_2)$, detrás de los argumentos.

(9) $* \bar{x}_1 * \bar{x}_2 * f(x_1, x_2) \overset{*}{\uparrow} * * \ldots$

¿Cómo diseñar una máquina para pasar de (1) a (9)? Claramente se ve que

el paso de (1) a (2) lo realiza	$r \mid r K_3^2$
el paso de (2) a (3) lo realiza	$L^2 l * rR$
el paso de (3) a (4) lo realiza	M_{b_1}
el paso de (4) a (5) lo realiza	$K_3^2 M_{b_2}$
el paso de (5) a (6) lo realiza	$K_3^2 M_{b_3}$
el paso de (6) a (7) lo realiza	$K_7 K_5 K_3$
el paso de (7) a (8) lo realiza	M_g
el paso de (8) a (9) lo realiza	A

Uniendo estas máquinas parciales obtenemos una máquina M_f para computar la función f:

$$r \mid r K_3^2 L^2 l * rRM_{b_1} K_3^2 M_{b_2} K_3^2 M_{b_3} K_7 K_5 K_3 M_g A$$

Ahora bien, el lema 2 no se limita al caso considerado en nuestro ejemplo en que f era una función binaria definida por sustitución con ayuda de 3 funciones binarias, sino que abarca todos los casos de definición por sustitución.

Sea g una función r-aria ($r \geqslant 1$) y sean $h_1 \ldots h_r$ funciones n-arias ($n \geqslant 0$). Las funciones g, $h_1 \ldots$, h_r sean Turing-computables por las máquinas M_g, $M_{b1} \ldots M_{br}$, respectivamente. La función n-aria f esté definida por sustitución con ayuda de g, $h_1 \ldots$, h_r del siguiente modo:

$$f(x_1 \ldots x_n) = g(h_1(x_1 \ldots x_n), \ldots, h_r(x_1 \ldots x_n))$$

Hemos de probar ahora que f es Turing-computable. Y, en efecto, la siguiente máquina M_f sirve para computar f:

$$r \mid r K_{n+1}^n L^n l * rRM_{b_1} K_{n+1}^n M_{b_2} \ldots K_{n+1}^n M_{b_r} K_{r+(r-1)n} K_{r+(r-2)n} \ldots K_r M_g A$$

como fácilmente se comprueba por consideraciones parecidas a las anteriormente expuestas. Obsérvese que, para $r=3$ y $n=2$, la máquina aquí indicada es idéntica a la obtenida en el ejemplo antes considerado.

Lema 3: El proceso de definición por inducción conduce de funciones Turing-computables a funciones Turing-computables.

Empecemos también aquí por considerar un ejemplo. Sea g una función monaria y sea h una función ternaria. Las funciones g y h sean Turing-computables por las máquinas M_g y M_h, respectivamente. La función binaria f esté definida por inducción con ayuda de g y h del siguiente modo:

$$f(x,0) = g(x)$$
$$f(x, S(y)) = h(x,y,f(x, y))$$

Diseñemos una máquina de Turing para computar esta función f. Como siempre, al comenzar, los dos argumentos estarán al principio de la cinta; el resto estará vacío:

(1) $* \bar{x} * \bar{y} \underset{\uparrow}{*} * * \ldots$

Empecemos por construir un «puente» con un palote y copiemos los argumentos en orden inverso

(2) $* \bar{x} * \bar{y} * | * \bar{y} * \bar{x} \underset{\uparrow}{*} \ldots$

Borremos ahora el palote intermedio (creando así un intervalo de tres cuadros vacíos que señalará a la máquina de acabar, A, dónde habrá de pararse, cuando hayamos obtenido el resultado final) y volvamos detrás de los argumentos copiados

(3) $* \bar{x} * \bar{y} * * * \bar{y} * \bar{x} \underset{\uparrow}{*} \ldots$

¿Cómo proceder? Iremos computando sucesivamente $f(x, 0)$, $f(x, 1)$, $f(x, 2)$, $f(x, 3)$, etc., hasta llegar a $f(x, y)$, que será nuestro resultado final. Comencemos con $f(x, 0)$, que, como sabemos, es igual a $g(x)$. Bastará, pues, con computar $g(x)$

(4) $* \bar{x} * \bar{y} * * * \bar{y} * \bar{x} * \overline{f(x, 0)} \overset{*}{\uparrow} \ldots$

Si $y = 0$, ya hemos obtenido el resultado final. Si $y \neq 0$, deberemos proseguir. ¿Cómo saber si $y = 0$ o no? Copiando $\bar{y}$ y quitándole un palote. Si no queda ninguno, es que y era 0 (representado por un solo palote). Si aún quedan palotes, es que y era distinto de 0.

Supongamos que $y \neq 0$. Ahora debemos computar $f(x, 1) = h(x, 0, f(x, 0))$. Para ello copiaremos x, escribiremos 0 y copiaremos $f(x, 0)$, computando a continuación el valor de la función h, aplicada a x, 0 y $f(x, 0)$ con lo que tendremos $f(x, 1)$:

(5) $* \bar{x} * \bar{y} * * * \bar{y} * \bar{x} * \overline{f(x, 0)} * \overline{y-1} * \bar{x} * \overline{0} * \overline{f(x, 0)} * \overline{f(x, 1)} \overset{*}{\uparrow} \ldots$

Si $y = 1$, ya hemos obtenido el resultado final. Si $y > 1$, deberemos proseguir. ¿Cómo saber si $y = 1$ o no? Copiando $\overline{y-1}$ (que es la quinta palabra, contando de derecha a izquierda) y quitándole un palote. Si no queda ninguno, es que $y-1$ era 0 (representado por un solo palote) y, por tanto, que y era 1. Si aún quedan palotes, es que y era mayor que 1.

Supongamos que $y \neq 1$. Ahora debemos computar $f(x, 2) = h(x, 1, f(x, 1))$. Para ello copiaremos $\bar{x}$, escribiremos $\overline{1}$ (para lo que bastará copiar $\overline{0}$, que en ese momento será la quinta palabra, contando de derecha a izquierda, y añadirle un palote) y copiaremos $\overline{f(x, 1)}$, computando a continuación el valor de la función h, aplicada a x, 1 y $f(x, 1)$, con lo que tendremos $f(x, 2)$:

(6) $* \bar{x} * \bar{y} * * * \bar{y} * \bar{x} * \overline{f(x, 0)}, * \overline{y-1} * \bar{x} * \overline{0} * \overline{f(x, 0)} * \overline{f(x, 1)} * \overline{y-2} * \bar{x} * \overline{1}$
$* \overline{f(x, 1)} * \overline{f(x, 2)} \overset{*}{\uparrow} * * \ldots$

Si $y=2$, ya hemos obtenido el resultado final. Si $y>2$, deberemos proseguir. ¿Cómo saber si $y=2$ o no? Copiando $\overline{y-2}$ (que es la quinta palabra, contando de derecha a izquierda) y quitándole un palote. Si no queda ninguno, es que $y-2$ era 0 (representado por un solo palote) y, por tanto, que y era 2. Si aún quedan palotes, es que y era mayor que 2.

Supongamos que $y\neq 2$. Ahora debemos computar $f(x,3)=h(x,2,f(x,2))$. Para ello copiaremos $\bar{x}$, escribiremos $\overline{2}$ (para lo que bastará copiar $\overline{1}$, que en ese momento será la quinta palabra, contando de derecha a izquierda, y añadirle un palote) y copiaremos $\overline{f(x,2)}$, computando a continuación el valor de la función h, aplicada a x, 2 y $f(x,2)$, con lo que tendremos $f(x,3)$:

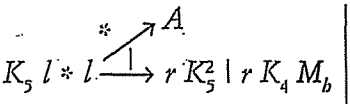
(7) $*\bar{x}*\bar{y}****\bar{y}*\bar{x}*\overline{f(x,0)}*\overline{y-1}*\bar{x}*\overline{0}*\overline{f(x,0)}*\overline{f(x,1)}*\overline{y-2}*\bar{x}*\overline{1}$
$*\overline{f(x,1)}*\overline{f(x,2)}*\overline{y-3}*\bar{x}*\overline{2}*\overline{f(x,2)}*\overline{f(x,3)}\overset{*}{\uparrow}\ldots$

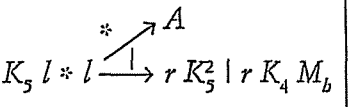
Si $y=3$, ya hemos obtenido el resultado final. Si $y>3$, deberemos proseguir. Está claro que seguiremos el mismo proceso para computar $f(x,4)$, $f(x,5)$..., hasta llegar a $f(x,y)$. Entonces acabaremos, borrando las anotaciones y resultados intermedios y llevando el resultdo final hasta el intervalo de tres cuadros vacíos construidos al principio, de modo que finalmente obtengamos

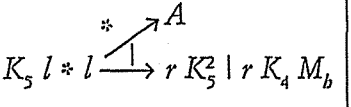
(fin) $*\bar{x}*\bar{y}*f(x,y)\overset{*}{\uparrow}***\ldots$

¿Cómo diseñar una máquina de Turing para pasar de (1) a (fin)? Claramente se ve que

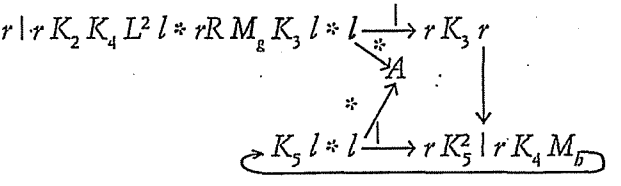
el paso de (1) a (2) lo realiza	$r\,\vert\, r K_2 K_4$
el paso de (2) a (3) lo realiza	$L^2\, l * r\mathcal{R}$
el paso de (3) a (4) lo realiza	M_g
el paso de (4) a (5) (o a (fin)) lo realiza	$K_3\, l * l \overset{\vert}{\longrightarrow} r K_3\, r \,\vert\, r K_4 M_b$ $\overset{*}{\longrightarrow} A$

el paso de (5) a (6) (o a (fin)) lo realiza 

el paso de (6) a (7) (o a (fin)) lo realiza 

el paso de (n) a (n+1) (o a (fin)) lo realiza 

Vemos que, a partir del paso de (5) a (6), la misma máquina parcial realiza todos los pasos a dar. Por tanto, uniendo las primeras máquinas parciales y empalmando la cuarta con la quinta (que es la que se repite hasta el final), obtenemos una máquina M_f para computar la función f:

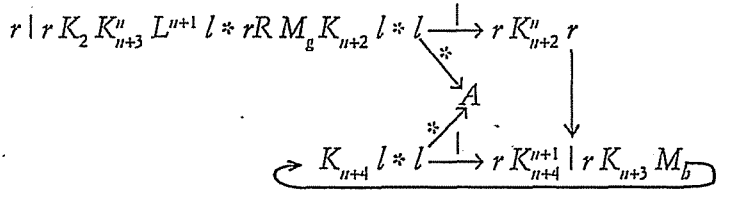


De todos modos, el lema 3 no se limita al caso considerado en nuestro ejemplo, en que f era una función binaria definida por inducción con ayuda de una función monaria y otra ternaria, sino que abarca todos los casos de definición por inducción.

Sea g una función n-aria ($n \geqslant 0$) y sea h una función $(n+2)$-aria. Las funciones g y h sean Turing-computables por las máquinas M_g y M_h, respectivamente. La función $(n+1)$-aria f esté definida por inducción con ayuda de g y h del siguiente modo:

$$f(x_1, \ldots x_n, 0) = g(x_1 \ldots x_n)$$
$$f(x_1, \ldots x_n, S(y)) = h(x_1, \ldots x_n, y, f(x_1, \ldots x_n, y))$$

Hemos de probar ahora que f es Turing-computable. Y, en efecto, la siguiente máquina M_f sirve para computar f:



como fácilmente se comprueba por consideraciones parecidas a las anteriormente expuestas. Obsérvese que, para $n = 1$, la máquina aquí indicada es idéntica a la obtenida en el ejemplo que acabamos de considerar.

De los lemas 1, 2 y 3 y de la definición de función recursiva primitiva claramente se sigue lo que queríamos probar, a saber:

Teorema: Todas las funciones primitivas recursivas son Turing-computables.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

El lector que necesite una introducción elemental a la lógica puede encontrarla en cualquiera de los libros de texto de lógica disponibles, como los míos o los de Deaño o Garrido. Un libro de texto moderno, claro y preciso es *Elementos de lógica formal*, de C. Badesa, I. Jané y R. Jansana (Barcelona: Ariel, 1998). Como ejemplo de aplicación de la lógica en la filosofía de la ciencia puede verse *Conceptos y teorías en la ciencia* (3.ª edición), de J. Mosterín, Madrid: Alianza Editorial, 2000.

La bibliografía sobre los temas y personajes tratados en este libro es inmensa. A continuación ofrecemos una selección orientativa de unas pocas obras y artículos, a fin de facilitar al lector interesado el acceso a textos y fuentes de información accesibles y fiables.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

FERREIRÓS, José: *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Basel: Birkhäuser Verlag, 1999.

HINTIKKA, Jaako: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Publ., 1995.

KANAMORI, Akihiro: «The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen», *The Bulletin of symbolic Logic*, 2, págs. 1-71, 1996.

TORRETTI, Roberto: *El paraíso de Cantor: La tradición conjuntista en la filosofía matemática*, Santiago (de Chile): Editorial Universitaria, 1998.

VAN HEIJENOORT, Jean: *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, 1967.

FREGE (1848-1925)

FREGE, Gottlob: *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, Introd. y trad. de Luis Valdés, Madrid: Tecnos 1998.

— *Escritos filosóficos*, Barcelona: Crítica, 1996. [Contiene tanto *Los fundamentos de la aritmética* como los ensayos semánticos, así como sus escritos en la polémica con Hilbert.]

— *Nachgelassene Schriften*, Hamburgo: Felix Meiner Verlag, 1969.

SCHIRM, Matthias (ed): *Frege: Importance and Legacy*, Berlin: Walter de Gruyter, 1997.

STELZNER, Werner: *Gottlob Frege: Jena und die Geburt der modernen Logik*. Jena: ReFIT e.V., 1996.

CANTOR (1845-1918)

CANTOR, Georg: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Editado por Ernst Zermelo. [Reimpresión en Georg Olms, 1966], 1932.

DAUBEN, Joseph: *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, 1979.

DEDEKIND, Richard: *¿Qué son y para qué sirven los números?* Trad. y ed. de José Ferreirós, Madrid: Alianza Editorial, 1998.

FERREIRÓS, José: *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1992.

HALLET, Michael: *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford: Clarendon Press, 1984.

JANÉ, Ignacio: «The role of the absolute infinite in Cantor's conception of set», *Erkenntnis*, 42, págs. 375-402, 1995.

MOORE, Gregory: *Zermelo's Axiom of choice: Its Origins, Development, and Influence*, Nueva York: Springer-Verlag, 1982.

PURKERT, Walter & Hans J. Ilgauds: *Georg Cantor 1845-1918*, Basel: Birkhäuser, 1987.

RUSSELL (1872-1970)

CLARK, Ronald: *Bertrand Russell and His World*, Londres: Thames and Hudson [Traducción española, Barcelona: Salvat, 1984], 1981.

GARCIADIEGO, A.: *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Madrid: Alianza, 1992.

MONK, Ray: *Bertrand Russell: The Spirit of Solitude, 1872-1921*, Nueva York: The Free Press, 1997.

RODRÍGUEZ-CONSUEGRA, Francisco: *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development*, Basel: Birkhäuser, 1991.

RUSSELL, Bertrand: *Autobiography* (3 tomos), Londres: George Allen & Unwin, 1967-1969.

— 1983 y sigs. *The Collected Papers of Bertrand Russell*, London: Unwin Hyman y Routledge.

SCHILPP, Arthur: *The Philosophy of Bertrand Russell* (2 vol.), The Library of Living Philosophers, 1944.

SCHOENMAN, Ralph: *Bertrand Russell, Philosopher of the Century*, Londres: George Allen & Unwin, 1967.

WOOD, Alan: *Bertrand Russell, the Passionate Sceptic*, Londres: George Allen & Unwin, 1957.

VON NEUMANN (1903-1957)

ASPRAY, William: *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*, The MIT Press, 1990.

GLIMM, Impagliazzo & Singer: *The Legacy of John von Neumann*, American Mathematical Society, 1997.

HEIMS, Steve: *John von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death*, Cambridge (Mass.): The MIT Pres, 1980.

LEGENDI, T., and SZENTIVANYI, T.: *Leben und Werk von John von Neumann*, Mannheim, 1983.

MACRAE, N.: *John von Neumann*, Nueva York, 1992.

VONNEUMANN, Nicholas: *John von Neumann as Seen by His Brother*, Meadowbrook, PA, 1987.

GÖDEL (1906-1978)

DAWSON, John: *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, Wellesley (Mass.): AK Peters, 1997.

GÖDEL, Kurt: *Collected Works*, Publicadas en tres tomos: I (1986), II (1990) y III (1995), Oxford University Press.

— *Obras completas*, Madrid: Alianza Editorial. 2.ª ed., 1989. [Contiene la traducción española de todas las obras publicadas en vida por Gödel, es decir, coincide con los tomos I y II de la edición anterior.]

— *Ensayos inéditos*, Barcelona: Mondadori, 1994. [Contiene algunos ensayos de los publicados en el tomo III de *Collected Works*.]

WANG, Hao: *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge (Mass.): The MIT Press, 1987.

TURING (1912-1954)

Collected Works of A. M. Turing (Ed. by D. Ince): Elsevier Science Publishers, 1992.

COPELAND, Jack, & PROUDFOOT, Diane: «Alan Turing's forgotten ideas in computer science», *Scientific American*, April, págs. 76-81, 1999.

HODGES, Andrew: *Alan Turing: The Enigma*, Nueva York: Simon & Schuster, 1983.

MILLICAN, Peter, & CLARCK, Andy: *The Legacy of Alan Turing*, 2 vols., Oxford University Press, 1996.